2001年度入学試験問題

数　　学

理　系

試験時間 150分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，問題が6問あります。総ページは20ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は6枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔 1 〕　z は $0^\circ < \arg z < 90^\circ$ を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(1)，B(z) を頂点とする △OAB を考える。また，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく。

(1) $\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ。

(2) 点 P(w) を直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3) 点 Q($z + \alpha - \alpha z$) に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ。

(4) $\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)$ を求めよ。ただし，偏角の範囲は，0° 以上 360° 未満とする。

空　白

〔 2 〕　$a > 0$ とし，極方程式 $r = 2a\sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線 C を図示せよ。

(2) 曲線 C と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

空　白

〔 3 〕　数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1 = 2, \quad (a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n), \quad a_{n+1} > a_n \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

によって定まっている。

(1)　a_2，a_3，a_4 を計算せよ。

(2)　一般項 a_n を n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}\right)$ を求めよ。

空　白

〔 4 〕　次のそれぞれの問いに答えよ。

(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB = O$ を満たすとき，行列 A の 4 つの成分の積 $abcd$ は正または 0 であることを示せ。

(2)　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持たず，3 つの成分が正であるとき，残りの 1 つの成分も正であることを示せ。

(3)　A，B を 2×2 行列とする。$AB = O$ かつ $B \neq O$ ならば，A の逆行列 A^{-1} は存在しないことを示せ。

空　白

〔 5 〕　関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して

$$f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ の値を求め，さらに $f'(x) = 2x - f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$(e^x f(x))' = 2xe^x$ を示せ。

(3)　$f(x)$ を求めよ。

空　白

〔 6 〕 A，B，C の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする。A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は p $(0 < p < 1)$，負ける確率は $1 - p$ とする。第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ。

(1) 第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する。C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。

(2) 第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。F_2，F_3，F_4 をそれぞれ求めよ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ。

空　白