

2000 年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が 6 問あります。総ページは 20 ページで、問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 6 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

[1] 複素数平面上に、3 点 $A(-2i)$, $B(1-i)$, $C(-1+3i)$ と、点 $D(1+i)$ を中心とする半径 1 の円 K がある。点 $P(z)$ は K の周上にあり、点 $Q(w)$ は、三角形 APQ と三角形 ABC が同じ向きに相似になる点とする（すなわち、 $AP : AQ = AB : AC$ で、 AP から AQ に反時計まわりに測った角が、 AB から AC に反時計まわりに測った角に等しい）。このとき、次の問いに答えよ。

(1) w を z の式で表せ。

(2) 点 P が円 K の周上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

空 白

〔 2 〕 2 次正方行列 A は、次の条件 (a), (b), (c) を満たしているとする。ただし、 E は 2 次の単位行列である。

(a) A は逆行列 A^{-1} をもち、 $A \neq E$ である。

(b) A^2 は A , A^{-1} , E のいずれかに等しい。

(c) $A \neq A^{-1}$

次の問いに答えよ。

(1) 条件 (a) を用いて、 $A \neq A^2$ を示せ。

(2) $A^2 = A^{-1}$ を示せ。

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$ のとき、 p , q の値を定めよ。ただし、 p , q は実数とする。

空 白

[3] 1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと、1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ、次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ、さらに、97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下、この操作を続けて、 k 番の箱に k 枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし、1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって、1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号を N とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) N の値を求めよ。また、 N 番の箱には何枚のカードが入っているか。
- (2) k 番 ($1 \leq k \leq N$) の箱において、その箱の中のカードに書かれている最大の数を k の式で表せ。
- (3) k 番 ($1 \leq k \leq N$) の箱の中のカードに書かれている数の合計を S_k とする。 $1 \leq k \leq N-1$ のとき、 S_k を k の式で表せ。また、 $1 \leq k \leq N$ のとき、 S_k の最大値を求めよ。

空 白

[4] 関数 $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $y = f(x)$ ($x \neq 0$) の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べ、曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。

(2) 右側からの極限值 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在するか。存在するならばその値を求め、存在しないならばその理由をいえ。

空 白

〔 5 〕 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta$ を求めよ。

(2) 媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x(\theta) = \int_0^\theta (1 + \tan u) du \\ y(\theta) = \int_0^\theta (1 - \tan u) du \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線の長さを求めよ。

空 白

[6] 1つのさいころを n 回投げる試行において、出た目がすべて奇数で、かつ 1 の目がちょうど k 回 ($0 \leq k \leq n$) 出る確率を p_k とする。次の問いに答えよ。

(1) $n = 3$ のとき、 p_1 を求めよ。

(2) p_k ($0 \leq k \leq n$) を n と k の式で表せ。また、出た目がすべて奇数で、かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q を求めよ。

(3) $n = 3m + 2$ (m は自然数) とする。 $0 \leq k \leq n - 1$ のとき、 $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$ となる k の範囲を求めよ。さらに、 $0 \leq k \leq n$ のとき、 p_k が最大となる k を求めよ。

空 白

