2023年度入学試験問題

数　　学

文　系

試験時間 120分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，問題が 4 問あります。総ページは 16 ページで，問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は 4 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔１〕　箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X，Y，Z，W とする。次の問いに答えよ。

(1)　$X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ。

(2)　X，Y，Z，W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ。

(3)　X，Y，Z，W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ。

(4)　X，Y，Z，W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ。

空　白

〔 2 〕 a，d を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公差 d の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$a_3 = S_2 = 18$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) a，d の値を求めよ。

(2) S_n を n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{S_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とし，数列 $\{U_n\}$ を

$$U_n = T_n - 4S_n + 5a_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。U_n が最小となるときの n の値をすべて求め，さらにそのときの U_n の値を求めよ。

(4) (3) で定めた数列 $\{U_n\}$ の初項から第 7 項までの和を V とする。c を実数とし，関数 $f(x) = 3x^2 + cx + 36$ を考える。定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ が V に等しいとき，c の値を求めよ。

空　白

〔 3 〕　空間内の 6 点 A，B，C，D，E，F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする。$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{e} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}$，$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{e}$，$\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{e}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = p\overrightarrow{b} + q\overrightarrow{d} + r\overrightarrow{e}$ を満たす実数 p，q，r の値を求めよ。

(3)　辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする。また，$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする。t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，△AGH の面積が最小となる t の値とそのときの △AGH の面積を求めよ。必要ならば，△AGH の面積 S について

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}})^2}$$

が成り立つことを用いてよい。

空　白

〔 4 〕　$a < 0$，$b > 0$，$c > 0$ とし，座標平面上の二つの放物線

$$C_1 : y = ax(x-2), \quad C_2 : y = b(x+c)^2$$

を考える。放物線 C_1 上の点 $(2,\ 0)$ における接線の傾きは -2 である。放物線 C_1 と放物線 C_2 の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点の x 座標を d とする。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) b，d を c を用いて表せ。

(3) 放物線 C_1 と x 軸で囲まれた部分を A とし，不等式 $0 \leqq x \leqq d$ の表す領域を B とする。A と B の共通部分の面積 S を c を用いて表せ。

(4) 放物線 C_2，x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 T を c を用いて表せ。

(5) (3) の S と (4) の T が $8S = 15T$ を満たすとき，c の値を求めよ。

空　白