2022年度入学試験問題

数　　学

文　系

試験時間 120分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，問題が4問あります。総ページは16ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は4枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔 1 〕　正の整数 N に対し，N を 7 進法で表したときの数字の並びを 10 進法で表された数だと思って読み取った数を M とする。例えば，$N = 7$ のとき，N は 7 進法で $10_{(7)}$ と表されるので $M = 10$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $M = 100$ のとき N の値を求めよ。また，$N = 100$ のとき M の値を求めよ。

(2) N は 7 進法では 3 桁で表され，10 進法では 2 桁で表されるとする。$2N = M$ が成り立つとき，N の値を求めよ。

(3) 7 進法で 3 桁で表される N のうちで，$2N = M$ が成り立つ最大のものを求めよ。

(4) N は 7 進法で 4 桁で表されるとする。このとき，$2N < M$ となることを示せ。

空　白

〔 2 〕　a を正の実数，t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく。t と a を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ。

空　白

〔 3 〕 n を自然数とする。袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている。また，空箱 A，B，C，D，E，F が用意されている。この準備の下で次の試行 1，試行 2 を順に行う。

試行 1　袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に入れた玉が白玉なら $i=0$，赤玉なら $i=1$ とおく。

試行 2　次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる。この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である。この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる。

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A，B，C の玉をすべて元通り袋に戻す。そして次の試行 3 を行う。

試行 3　袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる。次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる。最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ。また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ。

(2) 試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ。また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ。

(3) 試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする。事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X \cap Y)$ を n を用いて表せ。また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y \cap Z)$ を n を用いて表せ。

(4) (3) の事象 Y が起こったとき，(3) の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3) の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ。

空　白

〔 4 〕　実数 a に対して，座標平面上の点 $(a,\ 0)$ を通る傾き $4a$ の直線を L_a とする。a が実数全体を動くとき，直線 L_a が通り得る点全体からなる領域を S とする。また，2 点 $\mathrm{P}\,(0,\ 1)$ と $\mathrm{Q}\,(0,\ 2)$ に対し，$\sqrt{2}\,\mathrm{AP} \leqq \mathrm{AQ}$ を満たす点 A 全体からなる領域を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　領域 S を図示せよ。

(2)　領域 T を図示せよ。

(3)　S と T の共通部分の面積を求めよ。

空　白