2021年度入学試験問題

数　　学

文　系

試験時間 120分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，問題が4問あります。総ページは16ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は4枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔 1 〕　a を実数とする。関数 $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の満たす条件を求めよ。

(2)　次の不等式を解け。

$$|x+1| + |x-2| \leqq 4$$

(3)　x が (2) の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

空　白

〔 2 〕　座標平面において，二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 A$(1,\ 1)$，点 C$\left(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1\right)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3) B，D はそれぞれ (1)，(2) で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。

空　白

〔 3 〕　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c とする。また，

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする。次の問いに答えよ。

(1)　$b^2 > 4c$ である確率を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3)　2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，$f'(1) = 1$ である条件付き確率を求めよ。

空　白

〔 4 〕　次の問いに答えよ。

(1)　$A = \sin x$ とおく。$\sin 5x$ を A の整式で表せ。

(2)　$\sin^2 \dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

(3)　曲線 $y = \cos 3x$ $(x \geqq 0)$ と曲線 $y = \cos 7x$ $(x \geqq 0)$ の共有点の x 座標を小さい方から順に $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$ とする。このとき，関数

$$y = \cos 3x \quad (x_5 \leqq x \leqq x_6)$$

の値域を求めよ。

空　白