2018年度入学試験問題

数　　学

文　系

試験時間 120分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，問題が4問あります。総ページは16ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は4枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔 1 〕　次の問いに答えよ。

(1)　t の 2 次関数 $s = \left(t - \dfrac{1}{5}\right)\left(t - \dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ。

(2)　次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(A)　2 次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される。

(3)　次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(B)　2 次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される。

(4)　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x + y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

空　白

〔 2 〕　次の問いに答えよ。

(1)　実数 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，不等式

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} < 1$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad \left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定まる実数 α は，θ についての整式 $f(\theta)$ を用いて $\alpha = f(\theta)$ と表すことができる。このような $f(\theta)$ を一つ求めよ。

(3)　(2) で求めた $f(\theta)$ を用いて，数列 $\{\theta_n\}$ を

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

により定める。数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　(3) の数列 $\{\theta_n\}$ に対し，

$$|\,\theta_{n+1} - \theta_n\,| \leqq \frac{\pi}{1000}$$

となる最小の自然数 n を求めよ。

空　白

〔 3 〕　O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6}$$

を考える。C 上の点 D $(-1,\ 2)$ における C の接線を ℓ とし，D と異なる C と ℓ の共有点を E とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) E の座標を求めよ。

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 A $(a,\ b)$ を考える。ただし，a と b はともに正であるとする。直線 ℓ 上の動点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が P の位置によらず一定であるとき，A の座標を求めよ。

(4) A を (3) で求めた点とする。点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ。

空　白

〔 4 〕　座標平面上で，三つの不等式

$$y \geqq 0, \quad x + y \geqq 4, \quad 2x + 3y \leqq 12$$

によって表される領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。D に含まれる格子点をすべて求めよ。

(3) 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出た目の数を X，2 回目に出た目の数を Y とする。点 $(X,\ Y)$ が D に含まれる確率を求めよ。

(4) 1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の数の中の最小の数を Z，最大の数を W とする。点 $(Z,\ W)$ が D に含まれる確率 P_n を求めよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。

空　白