

2009 年度入学試験問題

数	学
---	---

文 系

試験時間 120 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が 5 問あります。総ページは 16 ページで、問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 関数 $y = x - x^3$ のグラフと、その上の点 $P(t, t - t^3)$ 、および点 P における接線 ℓ を考える。ただし $t > 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $y = x - x^3$ の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。
- (2) ℓ と $y = x - x^3$ のグラフの交点を Q とおく。ただし Q は P と異なる点とする。点 Q の x 座標を求めよ。
- (3) 三角形 OPQ の面積が 12 になるとき t を求めよ。ただし点 O は原点である。

空 白

〔 2 〕 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え、真の場合は証明を、偽の場合は反例を与えよ。

(1) $x < y$ ならば $x^2 < y^2$ である。

(2) $\log_2 x = \log_3 y$ ならば $x \leq y$ である。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば、 $f(x)$ は $x = a$ において極値をとる。

(4) n が 2 以上の自然数ならば、 $1 + 2 + \cdots + n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

空 白

〔 3 〕 座標平面上の定点 P と、関数 $y = f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える。
このとき、点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を、点 P と $y = f(x)$ のグラフの
距離と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P_1 \left(0, \frac{1}{3}\right)$ と $y = x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ。
- (2) 点 $P_2 \left(0, \frac{5}{4}\right)$ と $y = x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ。また、 $d_2 =$
 P_2R となる $y = x^2$ のグラフ上の点 R をすべて求めよ。
- (3) 点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y = x^2$ のグラフで囲まれた部分の面
積 S を求めよ。

空 白

〔 4 〕 四面体 OABC において,

$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad OA = OB = 2, \quad OC = 1$$

とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, $\vec{p}$ は実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{p} \cdot \vec{a}$, $\vec{p} \cdot \vec{b}$, $\vec{p} \cdot \vec{c}$ を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすとき, s, t の値を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P について, 直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。BQ : QC を求めよ。
- (4) (2) の条件を満たす点 P について, 2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ。

空 白

[5] 2 人のプレイヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり, B が勝つ確率は $1 - p$ であるとする (ただし $0 < p < 1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレイヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1) P_2 と P_4 を求めよ。

(2) P_{2n-1} を求めよ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

空 白

