入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

広島大学（文系）

対象年度： 2007 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

第　1　問

α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，x の関数

$$f(x) = \sqrt{2}x^3 - 3(\sin\alpha)x^2 + \sin\alpha\cos 2\alpha$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x) = 0$ の解を求めよ。

(2)　方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ。

第 2 問

図のように，1 を左下のマス目におき，1 の右に 2 を，2 の上に 3 を，3 の左に 4 をおく。次に 2 の右に 5 をおき，5 の上に 6，7 を，7 の左に 8，9 をおく。このように，すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく。左から j 番目，下から k 番目のマス目にある自然数を $a(j,k)$ と書く。例えば $a(3,4)=14$，$a(3,5)=23$ である。

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1)　$a(1,k)$，$a(j,1)$ をそれぞれ k，j の式で表せ。

(2)　$a(j,k)$ を $j \geqq k$ と $j<k$ の場合に分けて求めよ。

(3)　$a(j,k)=2007$ となる j，k を求めよ。

(4)　$\sum_{k=1}^{n} a(k,k)$ を求めよ。

第　3　問

座標空間の 2 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$ および

$$\overrightarrow{u} = (-1,\ 2,\ 5)\,,\quad \overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 1)\,,\quad \overrightarrow{w} = (-1,\ 3,\ 1)$$

と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\overrightarrow{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\overrightarrow{w}$ が直交するような点 C$(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3)　上で求めた点 P と C に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は 2 つの実数 a，b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = a\overrightarrow{\mathrm{CA}} + b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

と表せることを示せ。

第　4　問

p を正の定数とし，放物線 $C : y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}\,(p,\ q)$ における C の接線を ℓ とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}\,(p,\ 0)$ を通り，ℓ に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とすれば, $\alpha < 0 < \beta < p$ であることを示せ。

(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1, 放物線 C と直線 m および直線 $x = p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_2 - S_1 = \dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ。

第 5 問

袋の中に，1 と書いた玉が 2 個，2 と書いた玉が m 個，3 と書いた玉が $(8-m)$ 個，合計 10 個入っている。ただし，$2 \leqq m \leqq 7$ とする。この袋から玉を 2 個取り出し，それらの玉に書かれた数の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1) $S=4$ となる確率を求めよ。

(2) S を 3 で割った余りが 2 である確率を求めよ。

(3) S を 3 で割った余りの期待値 E を求めよ。

(4) E の値を最大にする m の値とそのときの E の値を求めよ。