

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2025 年

試験時間：120～180 分

問題数：7 問

第 1 問

座標平面上に 3 点 $A(0, 2)$, $B(-\sqrt{3}, -1)$, $C(\sqrt{3}, -1)$ があり, 三角形 ABC の内接円上に点 P がある。また, 2 点 D, E を

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{CE}$$

となるようにとる。ここで O は原点 $(0, 0)$ である。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 内積の値 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PE}$ が点 P の位置によらず一定であることを示し, その値を求めよ。
- (2) 線分 DE の中点を M とする。点 P が三角形 ABC の内接円上を 1 周するとき, 点 M の軌跡を求めよ。

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ を,

$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n > 3$ が成り立つことを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) 2 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3 < 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つことを示せ。

第 3 問

さいころを投げて座標平面上の点 P を動かす試行を繰り返す。最初の点 P の位置は原点であるとする。1 回の試行では 1 個のさいころを投げて、出た目に応じて以下の規則により点 P を動かす。

- 1 または 2 が出れば、点 P を x 軸方向に $+1$ だけ動かす。
- 3 または 4 が出れば、点 P を y 軸方向に $+1$ だけ動かす。
- 5 または 6 が出れば、点 P を y 軸方向に -1 だけ動かす。

n 回目の試行直後の点 P の座標を (x_n, y_n) とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_6 = y_6 = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $y_1, \dots, y_5$ がすべて 0 以上で、かつ $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。

第 4 問

座標平面上に、曲線 $D: y = \log x$ ($x > 0$) とその上の点 $A(a, \log a)$ がある。半径 r の円 C は y 軸に接し、かつ、円 C は曲線 D と点 A で同一の接線を持つ。さらに、 $r < a$ が成り立つとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) r を a を用いて表せ。
- (2) $r > \frac{a}{2}$ となることを示せ。
- (3) $a = \sqrt{3}$ のとき、 x 軸、 y 軸、円 C の下半分と曲線 D によって囲まれる領域の面積を求めよ。

第 5 問

すべての実数 x に対して定義された関数

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 16}}$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。
- (2) $f''(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。
- (3) $y = f(x)$ の凹凸、変曲点、ならびに漸近線を調べて、そのグラフの概形を描け。
- (4) 点 $(0, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に接線が引けるような実数 t の範囲を求めよ。

第 6 問

正方形に対して、その 2 本の対角線の交点を、その正方形の中心と呼ぶ。また、すべての内角が 180° 未満の四角形を凸四角形と呼ぶ。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上に正方形 PQRS があり、その中心 T から見て 4 点 P, Q, R, S は反時計回りに並んでいる。頂点 P, Q の座標を表す複素数を p, q とするとき、中心 T の座標を表す複素数 t を p, q を用いて表せ。
- (2) 複素数平面上に凸四角形 ABCD がある。頂点 A, B, C, D の座標を表す複素数をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。四角形 ABCD の外側に線分 AB を 1 辺とする正方形を描きその中心を X とする。同様に、ABCD の外側に線分 BC を 1 辺とする正方形を描きその中心を Y とし、ABCD の外側に線分 CD を 1 辺とする正方形を描きその中心を Z とし、ABCD の外側に線分 DA を 1 辺とする正方形を描きその中心を W とする。このとき、 $XZ = YW$ であり、かつ、直線 XZ と直線 YW が直交することを証明せよ。
- (3) (2) において、線分 XZ と線分 YW がそれらの中点で交わる時、四角形 ABCD はどのような四角形になるか、理由とともに述べよ。

第 7 問

関数 $f(x)$ は 3 次導関数 $f'''(x)$ を持ち、 $f'(0) = 0$ であり、すべての実数 x に対して $f''(x) > 0$, $f'''(x) < 0$ を満たすものとする。また、 $0 < a < b$ とし、

$$F = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a) - \int_a^b f(x) dx$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $F > 0$ を示せ。
- (2) $F < \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b - a)$ を示せ。
- (3) $f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) < \frac{b-a}{2} f'(b)$ を示せ。
- (4) $F < \frac{(b-a)^3}{4} f''(a)$ を示せ。