

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2024年

試験時間：120～180分

問題数：7問

第 1 問

a を実数とする。 $f(x) = x^2 - ax + a^2 - 2$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフと x 軸が $x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつような、 a の値の範囲を求めよ。
- (2) k を正の実数とし、 $g(x) = kx$ とする。 a が (1) の範囲にあるとき、 $y = |f(x)|$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるような k を求めよ。

第 2 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 定積分 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} x^2 \sin x \, dx$ を求めよ。
- (2) 複素数平面上の 3 点 $P(z)$, $Q(-1)$, $R(\sqrt{3}-1-i)$ が正三角形をなすとき, 複素数 z を求めよ。ただし, i は虚数単位である。
- (3) 正の整数 n, p, q が, $p > q$ かつ ${}_pC_2 + {}_qC_1 = n$ を満たすとする。 ${}_mC_2 \leq n$ となる最大の整数 m を求めよ。

第 3 問

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の $2n$ 個の点からなる集合

$$\{(x, y) \mid x = 1, 2, 3, \dots, n, y = 1, 2\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選び、その 3 点を線分で結んで得られる図形の面積を X とする。ただし、3 点が同一直線上にあるときは $X = 0$ とする。

(1) k が 0 以上の整数のとき、 X が $\frac{k}{2}$ となる確率 p_k を n と k の式で表せ。

(2) X が $\frac{n}{4}$ 以下となる確率を q_n とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

第 4 問

関数 $f(x) = e^x + e^{-2x}$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。
- (2) $f(x) = 2$ となる x の値をすべて求めよ。
- (3) (2) で求めた x の値のうち最小のものを a_1 ，最大のものを a_2 とする。 $y = f(x)$ のグラフ， x 軸，直線 $x = a_1$ ，直線 $x = a_2$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

第 5 問

n を正の整数とする。 x の関数

$$f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n - 3)x + 1$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) α を $f(x) = 0$ の 1 つの解とする。 $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

第 6 問

半径 1, 中心 O の円 C がある。2 つの円 C_1 と C_2 が次の 2 つの条件を満たすとする。

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する。
- C_1 と C_2 は互いに外接する。

円 C_1 , C_2 の中心をそれぞれ D , E とし, 半径をそれぞれ p , q とする。 $\theta = \angle DOE$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) q を p と θ を用いて表せ。
- (2) p を固定する。 θ が 0 に近づくとき, $\frac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ。

さらに, 円 C_3 が次の 2 つの条件を満たすとする。

- C_3 と C_1 は半径が等しい。
- C_3 は C に内接し, C_1 , C_2 のどちらとも外接する。

このとき以下の問いに答えよ。

- (3) $p = \sqrt{2} - 1$ のとき, q の値を求めよ。
- (4) θ が 0 に近づくとき, $\frac{q}{p}$ の極限値を求めよ。

第 7 問

m を 0 以上の整数, n を 1 以上の整数, t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし, $F(m, n)$ を

$$F(m, n) = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k C_m t^k$$

で定める。

- (1) p を整数とする。

$$A = \frac{(t-1)F(m+1, n) + tF(m, n)}{t^p}$$

が t によらない値となるような p と, そのときの A を求めよ。

- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} F(m, n)$ が収束することを示し, その極限值を求めよ。ただし, $0 < s < 1$ のとき $\lim_{k \rightarrow \infty} k^m s^k = 0$ であることは用いてよい。