

# 入学試験過去問題

## 数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2023 年

試験時間：120～180 分

問題数：7 問

## 第 1 問

以下の問いに答えよ。

- (1)  $p$  を実数とする。曲線  $y = |x^2 + x - 2|$  と直線  $y = x + p$  の共有点の個数を求めよ。
- (2) 等式  $f(x) = x^2 + \int_1^2 (xf(t) - t) dt$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

## 第 2 問

2つの実数  $a, b$  は  $0 < b < a$  を満たすとする。関数

$$f(x) = \frac{1}{b} \left( e^{-(a-b)x} - e^{-ax} \right)$$

の最大値を  $M(a, b)$ , 最大値をとるときの  $x$  の値を  $X(a, b)$  と表す。ここで,  $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $X(a, b)$  を求めよ。
- (2) 極限  $\lim_{b \rightarrow +0} X(a, b)$  を求めよ。
- (3) 極限  $\lim_{b \rightarrow +0} M(a, b)$  を求めよ。

### 第 3 問

点  $O$  を原点とする座標平面において、点  $A$  と点  $B$  が  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 5$ ,  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$  を満たすとする。

- (1)  $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$  となるような実数  $k$  は存在しないことを示せ。
- (2) 点  $B$  から直線  $OA$  に下ろした垂線と  $OA$  との交点を  $H$  とする。 $\overrightarrow{HB}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ。
- (3) 実数  $t$  に対し、直線  $OA$  上の点  $P$  を  $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$  となるようにとる。同様に直線  $OB$  上の点  $Q$  を  $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB}$  となるようにとる。点  $P$  を通り直線  $OA$  と直交する直線を  $\ell_1$  とし、点  $Q$  を通り直線  $OB$  と直交する直線を  $\ell_2$  とする。 $\ell_1$  と  $\ell_2$  の交点を  $R$  とするとき、 $\overrightarrow{OR}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $t$  を用いて表せ。
- (4) 3 点  $O$ ,  $A$ ,  $B$  を通る円の中心を  $C$  とするとき、 $\overrightarrow{OC}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ。

## 第 4 問

1 個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点  $P$  を動かすことを繰り返すゲームを考える。最初の  $P$  の位置を  $a_0 = 0$  とし、さいころを  $n$  回投げたあとの  $P$  の位置  $a_n$  を次のルールで定める。

- $a_{n-1} = 7$  のとき,  $a_n = 7$
- $a_{n-1} \neq 7$  のとき,  $n$  回目に出た目  $m$  に応じて

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + m & (a_{n-1} + m = 1, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ のとき}) \\ 1 & (a_{n-1} + m = 2, 12 \text{ のとき}) \\ 14 - (a_{n-1} + m) & (a_{n-1} + m = 8, 9, 10, 11 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- (1)  $a_2 = 1$  となる確率を求めよ。
- (2)  $n \geq 1$  について,  $a_n = 7$  となる確率を求めよ。
- (3)  $n \geq 3$  について,  $a_n = 1$  となる確率を求めよ。

## 第 5 問

関数

$$f(x) = \left| \cos x - \sqrt{5} \sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right|$$

について、以下の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$  の最大値を求めよ。

(2)  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$  を求めよ。

(3)  $S(t) = \int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x) dx$  とおく。このとき  $S(t)$  の最大値を求めよ。

## 第 6 問

実数  $a, b$  と虚数単位  $i$  を用いて複素数  $z$  が  $z = a + bi$  の形で表されるとき,  $a$  を  $z$  の実部,  $b$  を  $z$  の虚部とよび, それぞれ  $a = \operatorname{Re}(z)$ ,  $b = \operatorname{Im}(z)$  と表す。

- (1)  $z^3 = i$  を満たす複素数  $z$  をすべて求めよ。
- (2)  $z^{100} = i$  を満たす複素数  $z$  のうち,  $\operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$  かつ  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  を満たすものの個数を求めよ。
- (3)  $n$  を正の整数とする。 $z^n = i$  を満たす複素数  $z$  のうち,  $\operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$  を満たすものの個数を  $N$  とする。 $N > \frac{n}{3}$  となるための  $n$  に関する必要十分条件を求めよ。

## 第 7 問

関数  $f(x)$  と実数  $t$  に対し,  $x$  の関数  $tx - f(x)$  の最大値があればそれを  $g(t)$  と書く。

- (1)  $f(x) = x^4$  のとき, 任意の実数  $t$  について  $g(t)$  が存在する。この  $g(t)$  を求めよ。

以下, 関数  $f(x)$  は連続な導関数  $f'(x)$  を持ち, 次の 2 つの条件 (i), (ii) が成り立つものとする。

- (i)  $f'(x)$  は増加関数, すなわち  $a < b$  ならば  $f'(a) < f'(b)$

- (ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  かつ  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$

- (2) 任意の実数  $t$  に対して,  $x$  の関数  $tx - f(x)$  は最大値  $g(t)$  を持つことを示せ。

- (3)  $s$  を実数とする。  $t$  が実数全体を動くとき,  $t$  の関数  $st - g(t)$  の最大値は  $f(s)$  となることを示せ。