

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：120～180分

問題数：7問

第 1 問

次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $y = ax$ のグラフと $y = x|x - 2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。
- (2) $0 \leq a \leq 2$ とする。 $S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x - 2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

第 2 問

0 以上 9999 以下の整数を 4 桁で表示し、以下の操作を行うこととする。ただし、4 桁で表示するとは、整数が 100 以上 999 以下の場合は千の位の数字を 0、10 以上 99 以下の場合は千の位と百の位の数字を 0、1 以上 9 以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を 0、そして 0 はどの位の数字も 0 とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ換える。さらに、百の位の数字と一の位の数字を入れ換える。

また、整数 L に対し、操作によって得られた整数を $\overline{L}$ と表す。

- (1) M を 0 以上 9999 以下の整数とし、 $M = 100x + y$ のように整数 x, y ($0 \leq x \leq 99$, $0 \leq y \leq 99$) を用いて表す。操作によって得られた $\overline{M}$ が M の $\frac{2}{3}$ 倍に 3 を足した数に等しいならば、 $-197x + 298y = 9$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) N が 0 以上 9999 以下の整数ならば、操作によって得られた整数 $\overline{N}$ は N の $\frac{2}{3}$ 倍に 1 を足した数と等しくならないことを証明せよ。

第 3 問

n を自然数とする。 n 個のサイコロを同時に投げ、出た目の積を M とおく。

- (1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。
- (2) M が 2 で割り切れるが、3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。
- (3) M が 4 では割り切れるが、3 では割り切れない確率を求めよ。

第 4 問

座標空間において、原点 O と点 $A(1, 0, -1)$ と点 $B(0, 5, 0)$ がある。実数 t を用いて $t\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ と表される点全体を ℓ とする。また、 xy 平面上の $y = x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

- (1) 曲線 C 上の点 $P(a, a^2, 0)$ を固定する。 ℓ 上の点 Q を、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であるようにとる。このとき、点 Q の座標を a を用いて表せ。
- (2) 曲線 C 上の点 R と ℓ 上の点 S のうち、 $|\overrightarrow{RS}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また、そのときの $|\overrightarrow{RS}|$ の値を求めよ。

第 5 問

x, y についての方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \quad \dots\dots (*)$$

に関する次の問いに答えよ。

(1) x, y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち, y が最小であるものを求めよ。

(2) 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。このとき, $(x, y) = (a_{n+1}, a_n)$ が $(*)$ を満たすならば, $(x, y) = (a_{n+2}, a_{n+1})$ も $(*)$ を満たすことを示せ。

(3) $(*)$ の整数解 (x, y) は無数に存在することを示せ。

第 6 問

正の整数 m, n に対して,

$$A(m, n) = (m+1)n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x} dx$$

とおく。

- (1) $e^{-\frac{1}{n}} \leq A(m, n) \leq 1$ を証明せよ。
- (2) 各 m に対して, $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} A(m, n)$ を求めよ。
- (3) 各 n に対して, $c_n = \lim_{m \rightarrow \infty} A(m, n)$ を求めよ。

第 7 問

r を正の実数とし、関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

を考える。

- (1) $r = 1$ のとき、 $f(x)$ はつねに増加することを示せ。
- (2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ。

条件： $0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する。