

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2021 年

試験時間：120～180 分

問題数：7 問

第 1 問

定数 a は $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

- 2 点 A, B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある。
- 2 点 C, D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある。
- 2 点 A, D の x 座標は等しく、かつ正である。
- 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を、原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

- (1) S を t の式で表せ。
- (2) S の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

第 2 問

m を正の整数とする。座標平面上の点 (x, y) で

$$xn^3 + yn^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

がすべて整数であるようなものは、連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq m$$

の表す領域に何個あるか答えよ。

第 3 問

袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ、出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し、そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

- (1) $n = 2$ の場合、総得点が 2 点となる確率を求めよ。
- (2) $n = 4$ の場合、総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。
- (3) $n = 10$ の場合、総得点が 8 点以上となる確率を求めよ。

第 4 問

座標平面上に曲線 $C : y = \frac{1}{x}$ および 3 点 $A(-1, -1)$, $B(-1, 0)$, $D(1, 0)$ がある。
曲線 C 上の点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ に対して、直線 AP と直線 $y = -2$ の交点を Q とする。ただし、 P が A と等しいとき、直線 AP とは A における C の接線のこととする。また、直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする。

- (1) 点 P が曲線 C 上を動くとき、点 R の軌跡を求めよ。
- (2) 直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ。

第 5 問

以下の問いに答えよ。

- (1) $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とする。ただし、 i は虚数単位である。 z を 0 でない複素数とすると、次の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned} & \left(z - \frac{1}{z}\right) \left(wz - \frac{1}{wz}\right) \left(w^2z - \frac{1}{w^2z}\right) \left(w^3z - \frac{1}{w^3z}\right) \left(w^4z - \frac{1}{w^4z}\right) \\ &= z^5 - \frac{1}{z^5} \end{aligned}$$

- (2) ある定数 C に対して、等式

$$\sin \theta \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right) = C \sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ。また、 C の値を求めよ。

- (3) $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$ の値を求めよ。

第 6 問

2 曲線 $C_1 : y = e^{ax}$, $C_2 : y = a \log x + b$ は, x 座標が t ($0 < t < 1$) の点で接している。ただし, 2 曲線が点 P で接するとは, P を共有し, P における接線が一致することである。

- (1) a および b を t の式で表せ。
- (2) 曲線 C_1 と x 軸, y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする。極限值 $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_1(t)$ を求めよ。
- (3) 曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。極限值 $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_2(t)$ を求めよ。

第 7 問

多項式 $f_n(x)$, $g_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を条件

$$f_1(x) = x, \quad g_1(x) = 1,$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + xg_n(x), \quad g_{n+1}(x) = g_n(x) - xf_n(x)$$

で定める。

- (1) 正の整数 n に対して, 等式

$$\{f_{n+1}(x)\}' = (n+1)g_n(x), \quad \{g_{n+1}(x)\}' = -(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し, 多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ。

- (2) 正の整数 n に対して, 区間 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta = f_n(\tan \theta) \cos^n \theta, \quad \cos n\theta = g_n(\tan \theta) \cos^n \theta$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 正の整数 n と実数 a に対して, 方程式 $f_n(x) = ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ。