

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2020 年

試験時間：120～180 分

問題数：8 問

第 1 問

t を実数とし，不等式

$$(x^2 - 2x + y^2)(x^2 - 3x + y^2) \leq 0, \quad t \leq x \leq t + 1$$

の表す xy 平面上の領域を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。

t が $1 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき， $V(t)$ の最大値を求めよ。

第 2 問

四面体 $ABCD$ において、 $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, $\angle ADB = 90^\circ$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

- (1) $\angle BDC$ を求めよ。
- (2) $\frac{\sqrt{AB^2 + CD^2}}{DG}$ の値を求めよ。

第 3 問

袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。 n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし、 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。 n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

- (1) p_2, p_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 p_n を求めよ。
- (3) $n \geq 4$ とする。 S_1, S_2, S_3 が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき、 n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。

第 4 問

a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y = x^2$ と $x = \frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。

第 5 問

複素数平面上で複素数 0 , $\sqrt{3}$, $\sqrt{3} + i$ を表す点をそれぞれ A_1 , B_0 , B_1 とする。正の整数 n に対して、点 A_{n+1} は線分 $A_n B_n$ の中点とし、点 B_{n+1} は直線 $A_n B_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり、三角形 $A_{n+1} B_n B_{n+1}$ が三角形 $A_1 B_0 B_1$ と相似になるものとする。点 A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) が表す複素数を z_n とする。

- (1) 複素数 z_3 を求めよ。
- (2) 複素数 z_6 を求めよ。
- (3) 正の整数 m に対して、複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

第 6 問

正の整数 n に対して,

$$a_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k k, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{k+1}, \quad d_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k k^2$$

とする。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) b_n を求めよ。
- (3) c_n を求めよ。
- (4) d_n を求めよ。
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n}$ を求めよ。

第 7 問

有理数 a, b に対して, $(a + bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a, b は整数であることを証明せよ。ただし, i は虚数単位である。

第 8 問

定義域を $0 \leq x \leq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2 dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

- (1) 正の整数 n に対して、不等式

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) 正の整数 n に対して、不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geq (-1)^n f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

- (3) 実数 a ($0 \leq a \leq 1$) に対して、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ を求めよ。