

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2019年

試験時間：120～180分

問題数：7問

第 1 問

$a_1 = 3, a_2 = 2$ とし, $n \geq 2$ のとき,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$$

として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1) $n \geq 2$ のとき $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。

第 2 問

三角形 ABC は $AB + AC = 2BC$ を満たしている。また、角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 $AD = 15$ である。さらに、三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \angle BAD$ とするとき $\sin \theta$ の値を求めよ。また、 $A = \angle BAC$ とするとき、 $\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。
- (2) 辺 BC の長さを求めよ。

第 3 問

コインが5枚ある。さいころを振って出た目によって、これらのコインを1枚ずつ3つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚, 箱 A に入る。出た目が2か3であればコインを1枚, 箱 B に入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚, 箱 C に入れる。さいころを5回振ったとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。
- (2) A, B, C いずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。
- (3) 試行の後に箱 A を開けるとちょうど2枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど2枚入っている確率を求めよ。

第 4 問

座標平面上の円 C は、点 $(0, 0)$ を通り、中心が直線 $x + y = 0$ 上にあり、さらに双曲線 $xy = 1$ と接する。このとき、円 C の方程式を求めよ。ただし、円と双曲線がある点で接するとは、その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう。

第 5 問

n を正の整数とする。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n \theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2} \theta \, d\theta$ を n の式で表せ。

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta \, d\theta$ を求めよ。

第 6 問

数直線上に動点 P があり、はじめに原点にあるとする。 $k = 1, 2, \dots$ に対し、 k 回目にさいころを振ったとき、1, 2 の目が出たら P は正の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動し、3, 4 が出たら負の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動し、5, 6 が出たら移動しないとする。 n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする。

- (1) $0 < X_n$ となる確率を求めよ。
- (2) $\frac{1}{2} < X_n$ となる確率を求めよ。
- (3) ℓ は n 未満の正の整数とする。このとき、 $\frac{1}{2^\ell} < X_n$ となる確率を求めよ。

第 7 問

a は実数とする。座標平面上で連立不等式

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq (2a+3)x - a(a+3) \end{cases}$$

の表す領域を $D(a)$ とおく。いま、 x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

- (1) n を整数とする。このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ。
- (2) 任意の実数 a について、 $D(a)$ に含まれる格子点の個数と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ。