

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2018年

試験時間：120～180分

問題数：7問

第 1 問

a を正の数とし, t は $0 \leq t < a$ を満たす数とする。点 $(t, (t-a)^2)$ における曲線 $y = (x-a)^2$ の接線と, x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

- (1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。
- (2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの t の値を a を用いて表せ。
- (3) s は $0 \leq s \leq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

第 2 問

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \dots$ の第 n 項を a_n とし, また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \dots$ の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし, 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_\ell\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり, また数列 $\{d_\ell\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

- (1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。
- (2) 数列 $\{d_\ell\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{d_\ell\}$ の初項から第 ℓ 項までの和 $S_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} d_i$ を求めよ。

第 3 問

正方形 ABCD の辺を除く内部に、 $PA \perp PB$ を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{PC}$ を $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$ と表すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$ とするとき、 x, y を α を用いて表せ。
- (2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき、(1) で求めた x, y の和 $x + y$ の最大値を求め、そのときの P がどのような点かを答えよ。

第 4 問

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの $(n - 2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率 $P(k)$ を求めよ。

第 5 問

- (1) 次の定積分を求めよ。

$$f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x) dt$$

- (2) (1) で求めた x の関数 $f(x)$ に対し, 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

第 6 問

n を 3 以上の自然数として, n 枚のカード $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ がある。初めにこれらのカードを下から $C_n, C_{n-1}, \dots, C_2, C_1$ の順番に積み上げておく。いちばん上にあるカードが C_1 で, いちばん下が C_n である。積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す。いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか, またはいちばん上に戻す。どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする。

$k = 1, 2, \dots$ について, k 回の試行の後にカード C_1 が上から数えて ℓ 番目にある確率を $P(k, \ell)$ ($\ell = 1, 2, \dots, n$) で表し, また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて ℓ 番目にある確率を $Q(k, \ell)$ で表す。例えば $P(1, \ell)$ は ℓ によらず $\frac{1}{n}$ に等しい。以下の問いに答えよ。

- (1) $P(2, \ell)$ を求めよ。
- (2) $P(k, \ell)$ を求めよ。
- (3) $Q(k, \ell)$ を求めよ。

第 7 問

複素数 $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ に対し, $\alpha = z + z^8$ とおく。 $f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で, 3 次の係数が 1 であり, かつ $f(\alpha) = 0$ となるものとする。ただし, すべての係数が整数である多項式を, 整数係数の多項式という。

- (1) $f(x)$ を求めよ。ただし, $f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。
- (2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の α 以外の 2 つの解を, α の 2 次以下の, 整数係数の多項式の形で表せ。