

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：120～180分

問題数：7問

第 1 問

n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$ とし, $k = 2\cos\frac{2\pi}{n}$ とおく。そして, 線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を, $\vec{b}$, $\vec{c}$, k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し, $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} > \frac{1}{12}$ を示せ。

第 2 問

1 個のさいころを 3 回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- 1 回目は、出た目が得点になる。
- 2 回目は、出た目が 1 回目と同じならば得点は 0, 異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は、出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0, どちらも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし、総得点が n となる確率を p_n とする。

- (1) 総得点 n の最大値, 最小値と, それらの n に対する p_n を求めよ。
- (2) p_6 を求めよ。
- (3) p_n が最大となるような n と, そのときの p_n を求めよ。

第 3 問

t を 0 以上の実数とし、 O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ で 3 つの条件

$$PQ = 2, \quad p < q, \quad p + q = \sqrt{t}$$

をみたすものを考える。 $\triangle OPQ$ の面積を S とする。ただし、点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S = 0$ とする。

- (1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) S を t を用いて表せ。
- (3) $S = 1$ となるような t の個数を求めよ。

第 4 問

複素数平面上の点 z ($z \neq -\frac{i}{2}$) に対して, $w = \frac{z+2i}{2z+i}$ とする。

- (1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 w の描く図形を求めよ。
- (2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

第 5 問

曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする。 C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t ($t \geq 0$) である点を共有し、その点で共通の接線を持つとする。 C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

- (1) C の方程式を求めよ。
- (2) $S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

第 6 問

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_5 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し、その和を求めよ。

第 7 問

曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする。 C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t ($t \geq 0$) である点を共有し、その点で共通の接線を持つとする。 C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

- (1) C の方程式を求めよ。
- (2) $S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。
- (4) $S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると、 $\alpha > \log \frac{12}{5}$ であり、 $S(\alpha) < \frac{95}{144}$ となることを示せ。必要ならば $\log \frac{24}{5} < 1.57$ を用いてもよい。