

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2016 年

試験時間：120～180 分

問題数：7 問

第 1 問

座標平面上にすべての内角が 180° 未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおく。 k は $0 \leq k \leq 1$ を満たす定数とする。 0 以上の実数 s , t , u が $k + s + t + u = 1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

- (1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。
- (2) $E\left(\frac{1}{3}\right)$ を求めよ。
- (3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を、線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。

第 2 問

数直線上の点 Q は、はじめは原点 $x = 0$ にあり、さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。 Q が $x = a$ にあるとき、

- 出た目が 1 ならば $x = a$ にとどまる。
 - 出た目が 2, 3 ならば $x = a + 1$ へ動く。
 - 出た目が 4, 5, 6 ならば $x = 0$ に戻る ($a = 0$ ならば動かない)。
- (1) 整数 $a \geq 0$ に対して、さいころを 3 回投げたとき、 Q が $x = a$ にある確率を求めよ。
- (2) さいころを n 回投げたとき、 Q が $x = 0$ にある確率を求めよ。
- (3) さいころを n 回投げたとき、 Q が $x = 1$ にある確率を求めよ。

第 3 問

以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において, 不等式 $\log x < x$ を示せ。

(2) $1 < a < b$ のとき, 不等式

$$\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。

(3) $x \geq e$ において, 不等式

$$\int_e^x \frac{dt}{t \log(t+1)} \geq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2}$$

を示せ。ただし, e は自然対数の底である。

第 4 問

$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位) とおく。

- (1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ。
- (2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき, $\alpha + \bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\alpha}$ および α を求めよ。ただし, $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数である。
- (3) $(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)(1 - z^4)(1 - z^5)(1 - z^6)$ を求めよ。

第 5 問

2 点 $O(0, 0)$, $A(0, 2)$ を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く。点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする。点 Q を通り x 軸と平行な直線と、点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする。点 P の軌跡を C とする。

- (1) C の方程式を求めよ。
- (2) 正の実数 a に対して, C と x 軸と 2 直線 $x = a$, $x = -a$ によって囲まれる図形を, x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。このとき, $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

第 6 問

曲線 $C: y = \sin x$ 上を点 $P(t, \sin t)$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ が動く。正の実数 r に対して、 P における C の接線上に $PQ = r$ となるように点 Q をとる。ただし、 Q の x 座標は t よりも大きいとする。

(1) Q の座標を求めよ。

(2) $t = \frac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ。

第 7 問

p を 2 でない素数とし, 自然数 m, n は

$$(m + n\sqrt{p})(m - n\sqrt{p}) = 1$$

を満たすとする。

(1) 互いに素な自然数の組 (x, y) で

$$m + n\sqrt{p} = \frac{x + y\sqrt{p}}{x - y\sqrt{p}}$$

を満たすものが存在することを示せ。

(2) x は (1) の条件を満たす自然数とする。 x が p で割り切れないことと, m を p で割った余りが 1 であることが, 同値であることを示せ。