

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2015 年

試験時間：120～180 分

問題数：8 問

第 1 問

k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき、 k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。
- (2) $4m + 5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき、 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

第 2 問

b と c を $b^2 + 4c > 0$ を満たす実数として、 x に関する 2 次方程式 $x^2 - bx - c = 0$ の相異なる解を α, β とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。このとき、つぎの問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすことを示せ。

- (2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は、 b, c がともに整数であることである。これを証明せよ。

第 3 問

コインを n 回続けて投げ、1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

- コイン投げの第 1 回目には、1 点を得点とする。
- コイン投げの第 2 回目以降において、ひとつ前の回と異なる面が出たら、1 点を得点とする。
- コイン投げの第 2 回目以降において、ひとつ前の回と同じ面が出たら、2 点を得点とする。

例えばコインを 3 回投げて（裏，表，裏）の順に出たときの得点は、 $1 + 1 + 1 = 3$ より 3 点となる。また（裏，裏，表）のときの得点は、 $1 + 2 + 1 = 4$ より 4 点となる。

コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし、このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ が与えられたとき、 $P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。
- (2) $n \leq m \leq 2n - 1$ について、 $P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。

第 4 問

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ … ① の漸近線 $y = x$ … ② 上の点 $P_0 : (a_0, a_0)$ (ただし $a_0 > 0$) を通る双曲線 ① の接線を考え、接点を Q_1 とする。 Q_1 を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と、漸近線 ② との交点を $P_1 : (a_1, a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線 ① の接線の接点を Q_2 , Q_2 を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と、漸近線 ② との交点を $P_2 : (a_2, a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様に点 $P_n : (a_n, a_n)$, Q_n を定義していく。

- (1) Q_n の座標を a_n を用いて表せ。
- (2) a_n を a_0 を用いて表せ。
- (3) $\triangle P_n Q_n P_{n-1}$ の面積を求めよ。

第 5 問

0 以上の整数 n に対して, 整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

となることを示せ。

(2) 定積分

$$\int_{-1}^1 T_n(x) dx$$

の値を求めよ。

第 6 問

c を実数とし，曲線 $y = x^2 + c \cdots \textcircled{1}$ と曲線 $y = \log x \cdots \textcircled{2}$ の共通接線を考える。

- (1) 共通接線の本数を，実数 c の値によって答えよ。
- (2) 共通接線が 1 本であるとき，その接線と $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ それぞれとの接点を求めよ。
- (3) 共通接線が 1 本であるとき， $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 7 問

平面上に 2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

があり、点 $(-1, 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計周りに一定の速さで動き、点 P_2 は C_2 上を反時計周りに一定の速さで動く。二点 P_1, P_2 はそれぞれ点 $(1, 0)$ および点 $(-1, 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。 P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1, 0)$ に戻り、 P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1, 0)$ に戻るものとする。 P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して、その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

第 8 問

関数 $f(x) = |x + 2\sin(x + a) + b|$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ での最大値と最小値の差は、定数 a , b によらず常に π 以上で、かつ $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ。