

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2014年

試験時間：120～180分

問題数：8問

第 1 問

袋の中に、赤玉が 3 個、白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し、色を確認してから、再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに、赤玉を A 回（ただし $0 \leq A \leq N$ ）取り出す確率を $p(N, A)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 確率 $p(N, A)$ を N と A を用いて表せ。
- (2) N が 10 の倍数、すなわち $N = 10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n, 0), p(10n, 1), \dots, p(10n, 10n)$ のうち、一番大きな値は $p(10n, 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。
 - (i) 0 以上の整数 a , 自然数 b に対して, $\frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$ を示す。ただし $0! = 1$ とする。
 - (ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して, $\frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leq 1$ を示す。

第 2 問

座標平面上に、原点を中心とする半径 1 の円と、その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

第 3 問

座標平面上に、円 $C : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ と点 $Q(1, 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3, 0)$ とし、 x 軸上の点 $P_2, P_3, \dots$ を以下の条件によって決め、 P_n の座標を $(p_n, 0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き、その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき、3 点 Q, T_n, P_{n+1} は同一直線上にある。 $(n = 1, 2, \dots)$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 T_1 の座標を求めよ。
- (2) 点 P_2 の座標を求めよ。
- (3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ。
- (4) 点 P_n の座標を n の式で表せ。

第 4 問

n, m を 0 以上の整数とし,

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$$

とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $n \geq 2$ のとき, $I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式

$$I_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

を示せ。

(3) 次の式

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{mC_0}{n+1} - \frac{mC_1}{n+2} + \cdots + (-1)^m \frac{mC_m}{n+m+1}$$

を示せ。ただし $0! = 1$ とする。

第 5 問

関数 $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2 \cos x)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ の値を求めよ。
- (2) $0 \leq x < 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。
- (3) $x \geq 0$ のとき $(x^2 + 2x - 2)e^x \geq f(x)$ が成り立つことを示せ。

第 6 問

関数 $f(x) = x^x$ ($x > 0$) と正の実数 a について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。
- (2) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ における $\frac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

第 7 問

以下の問いに答えよ。

- (1) $t > 0$ のとき

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 座標平面上の点 $(0, a)$ を通って曲線 $y = xe^x$ に何本の接線が引けるか求めよ。

第 8 問

自然数 n に対して、和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。

- (1) 各自然数 n に対して $2^k \leq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき、2つの奇数 a_n, b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$$

と表されることを示せ。

- (2) $n \geq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

- (3) さらに、自然数 m, n ($m < n$) に対して、和

$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。 $S_{m,n}$ はどんな m, n ($m < n$) に対しても整数にならないことを示せ。