

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2013年

試験時間：120～180分

問題数：8問

第 1 問

1 辺の長さが 3 の正四面体 $OABC$ において、辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。
また、辺 OC 上に点 E をとり、 $CE = t$ とする。

- (1) AD の長さを求めよ。
- (2) $\cos \angle DAE$ を t を用いて表せ。
- (3) $\triangle ADE$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

第 2 問

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらが無作為に 1 列に並べる試行を行う。

- (1) 下記の条件 (A) が成り立つ確率を求めよ。
- (2) 下記の条件 (B) が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 条件 (A), (B) が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし、条件 (A), (B) は次のとおりである。

- (A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。
- (B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には、ちょうど 1 枚のカードがある。

第 3 問

a, b を実数とし, $a > 0$ とする。放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A\left(a, \frac{a^2}{4}\right), B\left(b, \frac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_A と n_A , 点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_B と n_B とおいたとき, ℓ_A と ℓ_B が直交しているものとする。2 つの接線 ℓ_A, ℓ_B の交点を P とし, 2 つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) P, Q の座標を a を用いて表せ。
- (3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と, そのときの面積を求めよ。

第 4 問

整数 p, q ($p \geq q \geq 0$) に対して 2 項係数を ${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

- (1) n, k が 0 以上の整数のとき,

$${}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$$

を計算し, n によらない値になることを示せ。

- (2) m が 3 以上の整数のとき, 和 $\frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \frac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ。

第 5 問

a は 0 でない実数とする。直線 $y = ax$ と曲線 $y = x \log(x + 1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 6 問

r を 1 より大きい実数とする。半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる。最初に円 C の中心 P は座標平面の $(0, 1)$ 、点 Q は $(0, 2)$ にあるものとし、円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく。角 θ ラジアンだけ回転したとき、半直線 PQ 上に $PR = r$ となる点 R をとる。 θ を 0 から 2π まで動かしたときの R の軌跡を考える。

- (1) α, β は $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ をみたし、 $\theta = \alpha$ のときの R の座標と $\theta = \beta$ のときの R の座標とが一致するものとする。 $t = \frac{\beta - \alpha}{2}$ とおくと、 r を t を用いて表せ。
- (2) (1) において、 θ を α から β まで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする。 S を t を用いて表せ。
- (3) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S}{r^2}$ を求めよ。

第 7 問

$m^4 + 14m^2$ が $2m + 1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。

第 8 問

$\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ$ を示せ。