

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：120～180 分

問題数：9 問

第 1 問

a は正の実数とし、座標平面上の直線 $\ell: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ を考える。 C 上の点 (x, y) (ただし $0 < x < \frac{1}{a}$) で ℓ との距離を最大にする点を $P(s, t)$ とおく。また P と ℓ との距離を d とおく。

以下の問いに答えよ。

- (1) d, s, t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。
- (2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき、点 $P(s, t)$ の軌跡を求め、図示せよ。

第 2 問

n 人 ($n \geq 3$) でじゃんけんを 1 回行うとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ。
- (2) あいこになる確率を求めよ。
- (3) 勝つ人数の期待値を求めよ。

ここで「あいこ」とは 1 種類または 3 種類の手が出る場合であり、勝つ人数が 0 の場合である。

第 3 問

r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) があり、その頂点を反時計回りに A_n, B_n, C_n, D_n とする。さらに R_n は次の条件 (i), (ii) を満たすとする。

- (i) 正方形 R_0 の頂点は $A_0(0, 0), B_0(1, 0), C_0(1, 1), D_0(0, 1)$ である。
- (ii) $A_{n+1} = C_n$ で、点 D_{n+1} は辺 C_nD_n 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A_2, A_3, A_4 の座標を r を用いて表せ。
- (2) A_{4n} の座標を (x_n, y_n) ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) とおく。 $x_{n+1} - x_n$ および $y_{n+1} - y_n$ を r, n の式で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を r を用いて表せ。

第 4 問

三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

- (1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。
- (2) k が $k \neq \frac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。
- (3) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

第 5 問

$f(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $g(x) = \log(1+x^2)$ (x は実数) とおく。ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す。

- (1) $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。
- (2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\}$ の値を求めよ。

第 6 問

$k+1$ 個 ($k \geq 1$) の部屋 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ がある。千葉君はある部屋から、その部屋以外の部屋を等しい確率 $\frac{1}{k}$ で 1 つ選び、そこへ移動する。最初、部屋 A_0 にいた千葉君が、 n 回 ($n \geq 1$) 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

第 7 問

a, b, c は実数とし

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$$

とおく。さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β と 2 つの虚数解をもち

$$\alpha + \beta = -(a + 1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{a}$$

を満たすと仮定する。

- (1) b, c を a を用いて表せ。
- (2) a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

第 8 問

次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$$

が任意の正の実数 x, y に対して成立するような、最大の実数 a の値を求めよ。

(2) 0 以上 1 以下の実数 a, b, c, d に対して

$$abcd \leq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2) \leq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。

第 9 問

座標平面上の点 (x, y) が

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (3x^2 - y^2)y = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき、 $x^2 + y^2$ の最大値、およびその最大値を与える x, y の値を求めよ。