

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2010 年

試験時間：120～180 分

問題数：9 問

第 1 問

1 辺の長さが 2 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える。さいころを 3 回投げ、出た目を順に i, j, k とするとき、 $\triangle A_iA_jA_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし、 i, j, k の中に互いに等しい数があるときは、得点は 0 であるとする。

- (1) 得点が 0 となる確率を求めよ。
- (2) 得点が 27 となる確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。

第 2 問

a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x - 2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

第 3 問

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b\}$$

とし、 D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で、 x 座標、 y 座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。

- (1) $a = 0$ のとき、 D に含まれる格子点の個数を求めよ。
- (2) a, b が共に整数であるとき、 D に含まれる格子点の個数は、 a, b の値によらず一定であることを示せ。

第 4 問

数直線の原点上にある点が、以下の規則で移動する試行を考える。

(規則) サイコロを振って出た目が奇数の場合は、正の方向に 1 移動し、出た目が偶数の場合は、負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の、点の座標を $X(k)$ とする。

- (1) $X(10) = 0$ である確率を求めよ。
- (2) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(5) \neq 0$ であって、かつ、 $X(6) = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(9) \neq 0$ であって、かつ、 $X(10) = 0$ となる確率を求めよ。

第 5 問

$\triangle ABC$ は、1 辺の長さが 1 の正三角形で、 t は正の実数とする。 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおく。

直線 AB , AC 上にそれぞれ点 D , E があり、 $\overrightarrow{AD} = t\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = t\vec{c}$ をみたしている。正三角形 $\triangle ADE$ の重心を G , 線分 BE の中点を M とする。

- (1) 内積 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG}$ を計算せよ。
- (2) t が正の実数全体を動くとき、 $\triangle CGM$ の面積を最小にする t の値と、そのときの面積を求めよ。

第 6 問

a, b は実数とする。関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t \, dt$$

をみたし、かつ、 $-\pi \leq x \leq \pi$ における最大値は 2π である。このとき、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 \, dx$$

を最小にする a, b の値と、その最小値を求めよ。

第 7 問

a を 1 より大きい実数とし、座標平面上に、点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ をとる。

曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$ と、曲線 $y = \frac{a}{x}$ 上の点 $Q\left(q, \frac{a}{q}\right)$ が、3 条件

- (1) $p > 0, q > 0$
- (2) $\angle AOP < \angle AOQ$
- (3) $\triangle OPQ$ の面積は 3 に等しい

をみたしながら動くとき、 $\tan \angle POQ$ の最大値が $\frac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

第 8 問

以下の問いに答えよ。

- (1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。
- (2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

第 9 問

$f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件 (P) を考える。

(P) 正の実数 r を十分小さく選べば, $|x - a| < r$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leq f(a)$ が成り立つ。

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a が条件 (P) をみたし, かつ, $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $f'(a) = 0$ であることを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} |x| - x & (x < 1 \text{ のとき}) \\ |x^2 - 6x + 8| & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき, 条件 (P) をみたすような実数 a 全体の集合を決定せよ。

(3) 一般に, 実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し, 次の命題は正しいか。正しいければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ。

(命題) すべての実数 a が条件 (P) をみたすならば, $f(x)$ は定数関数である。