

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2009 年

試験時間：120～180 分

問題数：10 問

第 1 問

自然数 a, b, c, d は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

- (1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。
- (2) a と b が互いに素で、 c と d がどちらも素数 p の倍数ならば、 $p = 5$ であることを示せ。ただし、2 つの自然数が互いに素とは、1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

第 2 問

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

- (1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 10 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が 6 の倍数になる確率を求めよ。

第 3 問

座標平面上に点 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ を取る。線分 AB 上に点 P を取り, P から x 軸に下ろした垂線を PH , A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし, また P は A と異なるものとする。 O を原点とし $\triangle OPM$ を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき, 通過する点全体が作る円の面積が最小となるとき点 P の座標を求めよ。

第 4 問

n を自然数とすると、次の問いに答えよ。

- (1) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数とすると、

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_nC_k \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_nC_k$ は二項係数である。

- (2) 不等式

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

が成り立つことを示せ。

第 5 問

a と k を正の実数とする。 $y = \frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が、ともに原点 $O(0, 0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする。原点 O を通り、直線 $y = kx$ に垂直な直線を ℓ とする。放物線 C_1 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_1 、放物線 C_2 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき、 $S = S_1 + S_2$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) S を a と k を用いて表せ。
- (2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする。 S を最小にする a の値と、そのときの S の値を求めよ。

第 6 問

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

- (1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 12 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が平方数になる確率を求めよ。ただし、 X が平方数であるとは、ある自然数 n を用いて $X = n^2$ と表されることである。

第 7 問

$f(x) = \frac{1}{x}$ とし、また実数 a, b について $g(x) = e^{-ax+b}$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ において常に $f(x) \geq g(x)$ が成り立つために a, b が満たすべき条件を求めよ。
- (2) $y = g(x)$ のグラフが点 $(1, 1)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y = g(x)$ のグラフが点 $(2, \frac{1}{2})$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき、 $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の交点を求めよ。
- (3) (2) で定めた $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ と $y = f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 8 問

次の問いに答えよ。

- (1) 置換 $x = \tan^3 \theta$ により, 定積分 $\int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ を求めよ。
- (2) $t > 1$ に対して $g(t) = \int_1^t \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx$ と定める。 $t \rightarrow \infty$ のとき $g(t) - at^b$ が収束するような正の実数 a, b を求めよ。

第 9 問

次の問いに答えよ。

- (1) 5 以上の素数は、ある自然数 n を用いて $6n + 1$ または $6n - 1$ の形で表されることを示せ。
- (2) N を自然数とする。 $6N - 1$ は、 $6n - 1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ。
- (3) $6n - 1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ。

第 10 問

a を実数とするとき、関数

$$f(x) = x + a^2 - 2, \quad g(x) = x(x - a)(x - a - 2)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 命題「 $f(x) \geq 0 \implies g(x) \geq 0$ 」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ。
- (2) 命題「 $x \geq 0 \implies$ 「 $f(x) \geq 0$ または $g(x) \geq 0$ 」」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ。