

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2008 年

試験時間：120～180 分

問題数：10 問

第 1 問

正三角形 ABC は、1 辺の長さが 1 である正六角形の辺上に 3 頂点をもつとする。

- (1) このような正三角形 ABC の 1 辺の長さ AB の最大値と最小値を求めよ。
- (2) 頂点 A が正六角形の 1 辺を $1:2$ に内分しているとき AB^2 を求めよ。

第 2 問

n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ、1 回目に出た目の数を x 、2 回目に出た目の数を y とする。 $|x - n| + |y - n| \leq n$ となる確率を P_n で表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) P_n が最大となる n を求め、そのときの P_n を求めよ。
- (3) $P_n = \frac{1}{36}$ となる n を求めよ。

第 3 問

以下の問いに答えよ。

- (1) x を有理数とする。 $7x^2$ が整数ならば、 x は整数であることを示せ。
- (2) a, b を整数とする。 $a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば、 a と b はともに偶数であることを示せ。
- (3) r は整数、 s は有理数とする。 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば、 s は整数であることを示せ。

第 4 問

2 次関数 $f(x)$ は

$$xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x) \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

を満たすとする。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $xf(x)$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。

第 5 問

平面上の $\triangle ABC$ において、辺 AB を $4:3$ に内分する点を D 、辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし、線分 AE と CD の交点を O とする。

- (1) $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$ とするとき、ベクトル $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$ で表せ。
- (2) 点 O が $\triangle ABC$ の外接円の中心になるとき、3 辺 AB , BC , CA の長さの 2 乗の比を求めよ。

第 6 問

1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し、その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする。2 つが一致し、1 つがこれと異なる場合には、2 つの同じ値を X とし、3 つとも同じならその値を X とする。

- (1) 確率 $P(X \leq k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ。
- (2) 確率 $P(X = k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ。
- (3) $P(X = k)$ が最大となる k の値はいくつか。

第 7 問

関数 $y = \log|x|$ のグラフ G 上に動点 A, B があり、それぞれの x 座標を a, b とする。
 A における接線と B における接線が直交し、 $a > 0$ であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ab を求めよ。
- (2) 線分 AB の中点の存在範囲を求めよ。
- (3) 直線 AB が点 $(1, 0)$ を通り、 $a \neq 1$ を満たすとき、直線 AB と G で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 8 問

行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) $A^m = E$ となる最小の自然数 m と, $B^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) m は (1) で求めた値とし, k は $1 \leq k \leq m$ を満たす自然数とする。単位円周上の点 P に対し, 行列 B, A^2, A^k で表される移動による P の行き先を, それぞれ Q, R, S とする。 $\triangle QRS$ が正三角形となるような k, P の組をすべて求めよ。

第 9 問

実数 a, b は $0 < a < b$ を満たし, x, y, z はいずれも a 以上かつ b 以下であるとする。
このとき次を示せ。

- (1) $x + y = a + b$ ならば, $xy \geq ab$ である。
- (2) $x + y + z = a + 2b$ ならば, $xyz \geq ab^2$ である。

第 10 問

$c \geq 0$ に対して，連立不等式

$$0 \leq x \leq \frac{4\pi}{3}, \quad 0 \leq y \leq |\sin x - c|$$

で表される座標平面上の図形を A とする。

- (1) A の面積 S を最小にするような c の値と，そのときの S を求めよ。
- (2) A を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とする。 V を最小にするような c の値と，そのときの V を求めよ。