

# 入学試験過去問題

## 数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2006 年

試験時間：120～180 分

問題数：7 問

## 第 1 問

実数  $a$  に対し, 2 次関数  $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$  を考える。

- (1) 方程式  $f(x) = 0$  が異なる 2 つの実数解を持つような  $a$  の範囲を求めよ。
- (2) 2 次関数  $y = f(x)$  のグラフが 2 点  $(\alpha, 0)$ ,  $(\beta, 0)$  を通り,  $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$  となるような  $a$  の範囲を求めよ。

## 第 2 問

1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。この中からカードを 3 枚同時に取り出す。取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち、最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を  $X$  とする。

- (1)  $X = 3$  である確率を求めよ。
- (2)  $X$  の期待値を求めよ。

### 第 3 問

関数  $f(x)$  を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また  $g(x) = -x^2 + ax + b$  とする。 $y = g(x)$  のグラフが  $y = f(x)$  のグラフと 2 点で接するとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  の値を求めよ。
- (2)  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。

## 第 4 問

$\triangle OAB$  において,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおき,

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

とする。辺  $AB$  上に点  $P_1$  をとる。ただし  $P_1$  は  $A$ ,  $B$  とは異なるとする。 $P_1$  から辺  $OB$  に垂線  $P_1Q_1$  を下ろす。次に,  $Q_1$  から辺  $OA$  に垂線  $Q_1R_1$  を下ろす。さらに,  $R_1$  から辺  $AB$  に垂線  $R_1P_2$  を下ろす。以下, 同様の操作を続けて, 点  $P_n, Q_n, R_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を定める。 $\overrightarrow{AP_n} = t_n(\vec{b} - \vec{a})$  により  $t_n$  ( $0 < t_n < 1$ ) を定める。

- (1)  $\overrightarrow{BQ_1}$  を  $t_1$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2)  $t_2$  を  $t_1$  を用いて表せ。
- (3)  $t_n$  を  $t_1$  と  $n$  を用いて表せ。
- (4)  $P_1 = P_2$  となるような  $t_1$  の値を求めよ。
- (5)  $P_1 = P_2$  のとき,  $\triangle P_1Q_1R_1$  の面積を求めよ。

## 第 5 問

$a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  とする。 $f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + c$  について,  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と原点で接しているとする。

(1)  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と接する点の  $x$  座標をすべて求めよ。

(2) さらに  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$  が成り立っているとき,  $f(x) = 0$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) をみたす  $x$  の値をすべて求めよ。

## 第 6 問

$a, t$  を実数とするとき、座標平面において、

$$x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$$

で定義される図形  $C$  を考える。

- (1) すべての  $t$  に対して  $C$  が円であるような  $a$  の範囲を求めよ。ただし、点は円と見なさないものとする。
- (2)  $a = 4$  とする。 $t$  が  $t > 0$  の範囲を動くとき、 $C$  が通過してできる領域を求め、図示せよ。
- (3)  $a = 6$  とする。 $t$  が  $t > 0$  であって、かつ  $C$  が円であるような範囲を動くとき、 $C$  が通過してできる領域を求め、図示せよ。

## 第 7 問

$a$  を実数とし、数列  $\{a_n\}$  を以下のように定義する。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての自然数  $n$  に対し  $a_n \neq 0$  となるような  $a$  の範囲を求めよ。