

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2005 年

試験時間：120～180 分

問題数：10 問

- 第 8(A) 問，第 8(B) 問，第 8(C) 問から 1 問を選択して解答

第 1 問

数列 $\{a_n\}$ において, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ である。

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおくとき, $\{b_n\}$ は正の公比をもつ等比数列とする。

(1) $\frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}$ を, b_n , b_{n+1} を用いて表せ。

(2) $\sum_{n=1}^6 \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = -1456$ が成り立つとき

(i) 一般項 b_n を求めよ。

(ii) 一般項 a_n を求めよ。

第 2 問

a を 1 と異なる正の定数とすると、次の不等式を満たす (x, y) の範囲を図示せよ。

$$a^{2x} - a^{2y} - a^{2x+y} + a^{x+2y} - a^x + a^y < 0$$

第 3 問

- (1) 次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \geq \log_{10}(-2x^2 + 2x + 1)$$

- (2) x, y が (1) の不等式を満たすとき, $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

第 4 問

関数 $f(x) = 3 \cos 2x + 7 \cos x$ について, $\int_0^\pi |f(x)| dx$ を求めよ。

第 5 問

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) $A^3 = E$ となるための必要十分条件を, a, b を用いて表せ。
- (2) (1) の条件が成立するとき, すべての自然数 k ($k = 1, 2, \dots$) に対して

$$A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = O$$

であることを示せ。

第 6 問

以下において $\log x$ は自然対数を表す。

- (1) $a > \frac{1}{e}$ のとき, $x > 0$ に対し $x^a > \log x$ であることを示せ。
- (2) $a > \frac{1}{e}$ のとき, $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $0 < t < \frac{1}{e}$ として, 曲線 $y = x \log x$ ($t \leq x \leq 1$) および x 軸と直線 $x = t$ で囲まれた部分を, y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする。このとき, $\lim_{t \rightarrow +0} V(t)$ を求めよ。

第 7 問

n は自然数とし、 2^n は 100 桁の数で、 2^{n-1} は 99 桁の数である。

- (1) n を求めよ。
- (2) 2^n の一の位の数字を求めよ。
- (3) 2^n の十の位の数字を求めよ。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ としてよい。

第 8 (A) 問

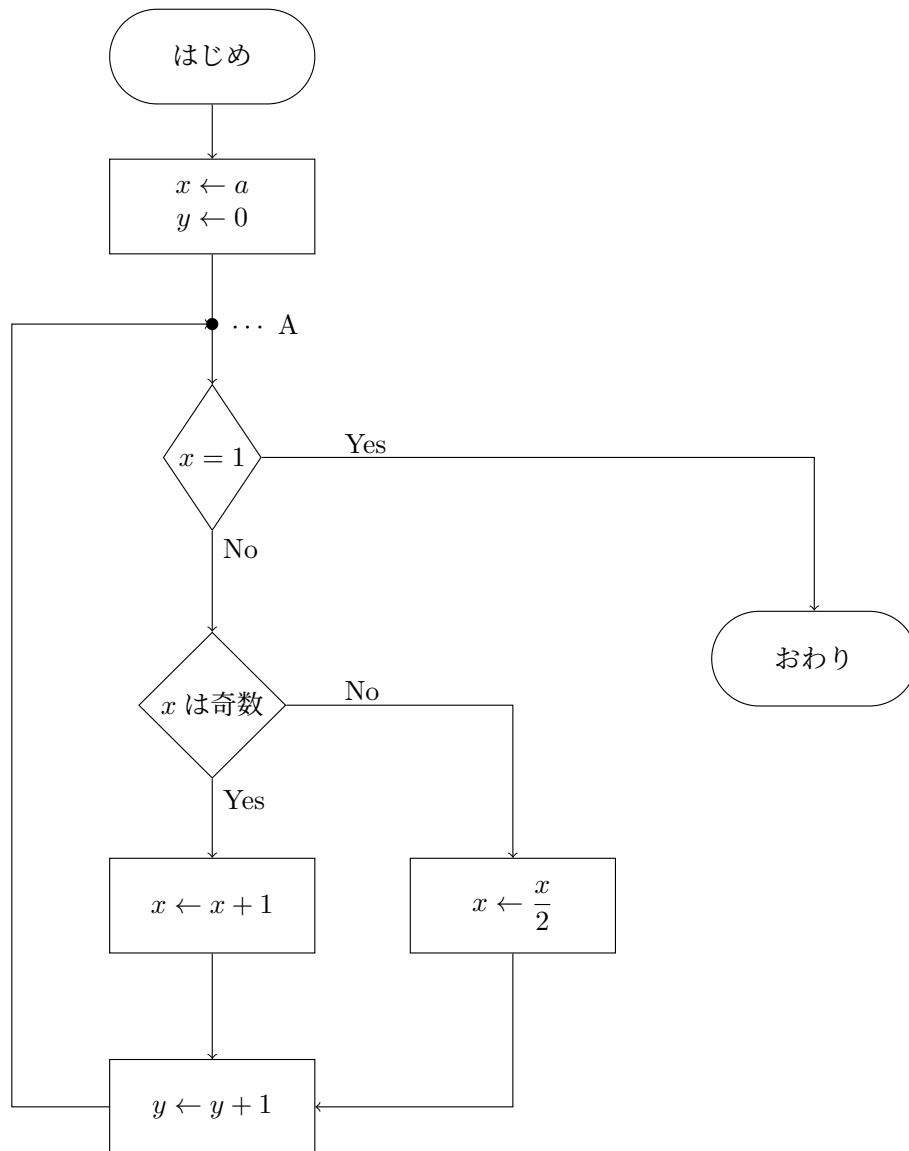
12 枚のカードがある。このうち 4 枚のカードには数字 0 が書いてあり、残り 8 枚のカードには数字 1 が書いてある。この 12 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出す。このとき、取り出したカードの数字を X, Y, Z とおく。ただし、 $X \leq Y \leq Z$ とする。

- (1) $X = 1$ となる確率 $P(X = 1)$ を求めよ。
- (2) $X + Y + Z$ の期待値 $E(X + Y + Z)$ と分散 $V(X + Y + Z)$ を求めよ。
- (3) $Y = 0$ であるとき、 $Z = 1$ となる条件つき確率を求めよ。

第 8 (B) 問

a, k は正の整数とする。次頁の流れ図のプログラムを実行する。

- (1) $a = 5, 6, 7, 8$ のそれぞれの場合に、このプログラム実行開始から終了までの A 点における x, y の値の表を作成せよ。
- (2) $a = 9$ のとき、このプログラム実行開始から終了までの A 点における x の値を 2 進法で表示せよ。
- (3) $a = 2^k + 1$ であるとき、プログラム終了時の y の値を k を用いて表せ。



第 8 (C) 問

α は絶対値 1 の複素数とし、複素数 z に対して、 $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく。ただし $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

- (1) 複素数平面上で、 z が原点と点 α を通る直線上（ただし、点 $\frac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき、 w を表す点は原点と点 $\bar{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。
- (2) 複素数平面上で、 z が不等式 $|z| > 1$ を満たすとき、複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。