

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2004 年

試験時間：120～180 分

問題数：9 問

- 第 7(A) 問, 第 7(B) 問, 第 7(C) 問から 1 問を選択して解答

第 1 問

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき、AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし、AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

- (1) AD の長さが $\frac{3}{4}$ であるとき、 r の値を求めよ。
- (2) AD の長さを x とおくとき、 r^2 を x の式で表せ。
- (3) $\angle DME = \theta$ とおくとき、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。

第 2 問

3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

とし、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) b, c を a を用いて表せ。
- (2) $f(x) - g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を a を用いて表せ。

第 3 問

$0 < t < 1$ とする。2 次方程式

$$x^2 - 2tx + 1 = 0$$

の解のひとつを α とする。複素数平面上の 4 点を $O(0)$, $A(-1)$, $B(1)$, $P(\alpha)$ とし, AB を直径とする円を C とする。点 A を通り OP に平行な直線が円 C と交わる A 以外の点を Q とする。

(1) $|\alpha|$ を求めよ。

(2) 四角形 $ABPQ$ の面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ。

第 4 問

xy 平面上の動点 A は原点 $O(0, 0)$ を出発し、 x 軸上を点 $(2, 0)$ まで動くとする。また動点 B は点 $(0, 1)$ を出発し、 $AB = OB = 1$ なる条件を満たしながら第 1 象限内を点 $(1, 0)$ まで動くとする。点 P は線分 AB 上の点で $2BP = OA$ を満たす。

- (1) $\angle AOB = \theta$ とするとき、点 P の座標を θ で表せ。ただし点 A が点 O と一致する
ときを除く。
- (2) 点 P の軌跡と x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

第 5 問

n を自然数とする。 n 次多項式 $P_n(x)$ は, $n+1$ 個の整数 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して

$$P_n(k) = 2^k - 1$$

を満たす。

- (1) $P_2(x) - P_1(x)$ および $P_3(x) - P_2(x)$ を因数分解せよ。
- (2) $P_n(x)$ を求めよ。

第 6 問

N を自然数とする。

$$a_1 = N, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(a_n + \left\lfloor \frac{N}{a_n} \right\rfloor \right) \right\rfloor \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について以下の問いに答えよ。ここで $\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数を表す。

- (1) $a_n \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ を証明せよ。
- (2) $a_n \leq a_{n+1}$ ならば $a_n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ であることを証明せよ。

第 7 (A) 問

xyz 空間内に点 $A(1, 1, 2)$ と点 $B(-5, 4, 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき、三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

第 7 (B) 問

x を実数とすると、 $\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数を表す。

(1) 整数 $\left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor$ を 2 進法で表せ。

(2) 次の手続きを考える。

(i) 初期値設定 $b \leftarrow f(a)$, $s \leftarrow 0$ を行う。

(ii) 次の枠内を $b < c$ となるまで繰り返す:

$s \leftarrow s + b$, $b \leftarrow g(b * r)$ を順次実行する。

(iii) 上の繰り返し終了後 $t \leftarrow h(s)$ を行う。

定数 a , r , c と関数 f , g , h をそれぞれ $a = \frac{1}{10}$, $r = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $f(x) = \lfloor 2^{10}x \rfloor$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$, $h(x) = 2^{-10}x$ として上の手続きを実行する。このとき (ii) の繰り返しの回数と、実行後の t の値を求めよ。

第 7 (C) 問

52 枚からなるカードの組がある。この組のそれぞれのカードには 1 から 13 までの数がひとつ書かれており、各数についてそれぞれ 4 枚ずつある。この組から 1 枚目のカードを引き、そのカードに書かれている数を X とする。次にこのカードをもとへ戻さずに 2 枚目のカードを引き、そのカードに書かれている数を Y とする。 X , Y のうちの大きい方の数を Z とする。ただし 2 つの数が同じ場合は、その数を Z とする。

- (1) $X = i$ ($i = 1, 2, \dots, 13$) のとき, $Y = j$ ($j = 1, 2, \dots, 13$) となる条件つき確率を求めよ。
- (2) $X = Y$ となる確率を求めよ。
- (3) Z の期待値を求めよ。