

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（理系）

対象年度：2002年

試験時間：120～180分

問題数：10問

- 第8(A)問，第8(B)問，第8(C)問から1問を選択して解答

第 1 問

次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし、空の箱があってもよいとする。

- (1) 赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。
- (2) 赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。
- (3) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

第 2 問

四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0}$$

をみたしている。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。
- (2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。

第 3 問

座標空間内に 2 点 $A(1, 0, 0)$ と $B(-1, 0, 0)$ がある。不等式

$$\angle APB \geq 135^\circ$$

をみたす空間内の点 P の全体の集合に、2 点 A, B をつけ加えてできる立体の体積を求めよ。

第 4 問

行列 E と A を

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。行列 $xE - A$ が逆行列をもたないような x の 2 つの値を α, β ($\alpha > \beta$) とし、行列 P, Q を

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 行列の積 PQ を計算せよ。
- (2) 自然数 n に対して、 P^n を求めよ。
- (3) すべての自然数 n に対して、

$$A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$$

が成立することを示せ。

第 5 問

次の問いに答えよ。

- (1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) n が正の整数のとき, $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。

第 6 問

n を 2 以上の整数とし,

$$I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt \, dt \quad (x \geq 0)$$

と定める。

(1) $n = 2$ のとき, $I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が

$$\frac{n}{n^2 - 1}$$

であるならば, n は偶数であることを証明せよ。

第 7 問

無限数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n} \quad (n \geq 1)$$

で定める。ここで c は定数とする。

- (1) $c = 2$ のとき、一般項 a_n を求めよ。
- (2) $c \geq 2$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となることを示せ。
- (3) $c = \sqrt{2}$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。

第 8 (A) 問

次の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上で方程式

$$|z - 3i| = 2|z|$$

が表す図形を求め、図示せよ。

- (2) 複素数 z が (1) で求めた図形から $z = i$ を除いた部分を動くとき、複素数 $w = \frac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め、図示せよ。

第 8 (B) 問

配列（添え字付き変数） a において、 $a[0], a[1], a[2], \dots, a[n]$ には異なる整数の値が入っている。このとき、次頁の流れ図は

$$a[1], a[2], \dots, a[n]$$

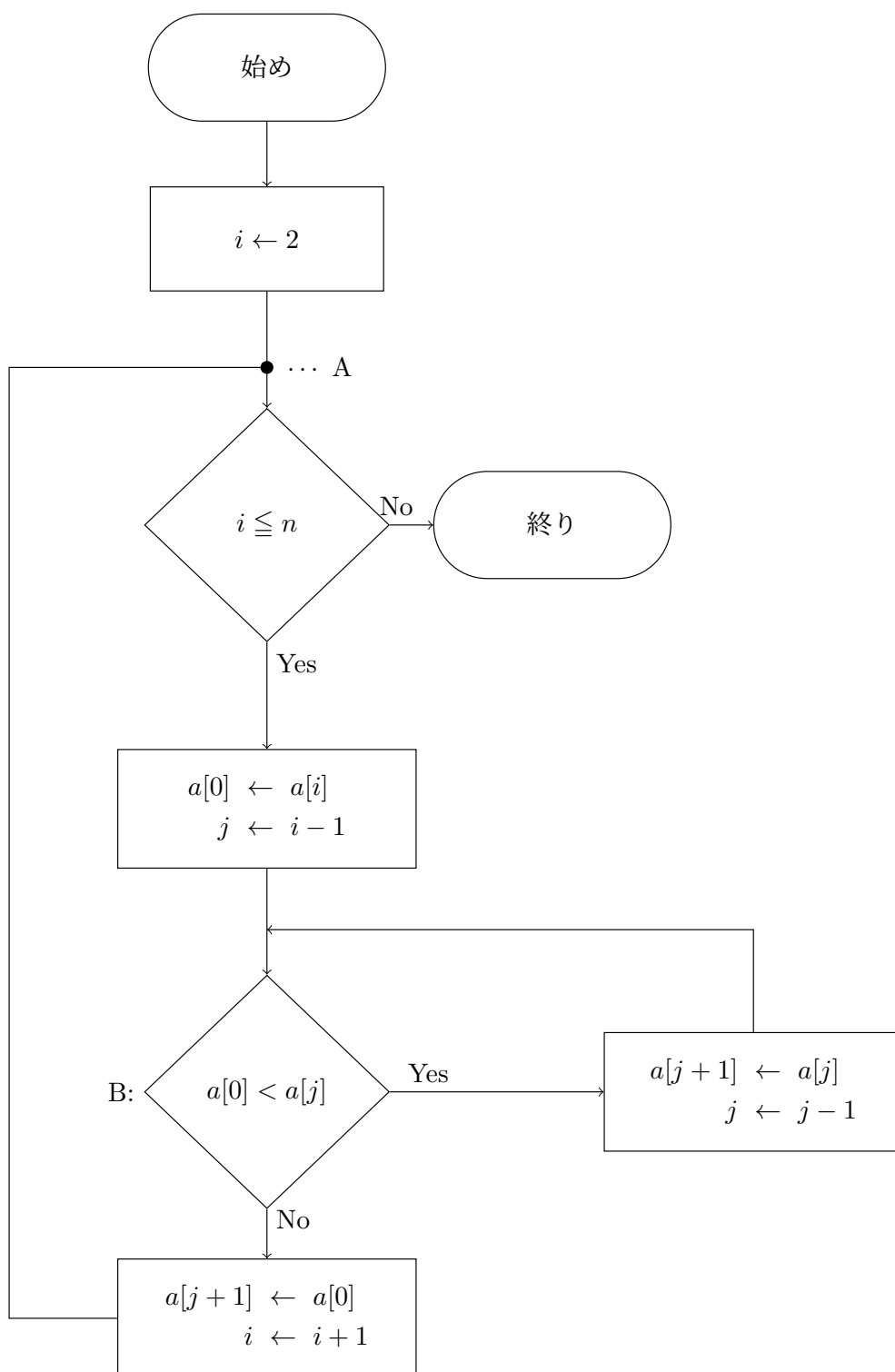
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし、長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

- (1) $n = 4$ とし、「始め」においては

$$a[0] = 0, \quad a[1] = 5, \quad a[2] = 2, \quad a[3] = 7, \quad a[4] = 3$$

であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの、A 点における i の値と $a[k]$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) の値の表を作成せよ。

- (2) B 点の判定 $a[0] < a[j]$ の回数は、 $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値により異なる。この判定回数をもっとも少ない場合と、もっとも多い場合について、それぞれ判定の回数を自然数 n を用いて表せ。またそれぞれの場合に対応する $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値の例を示せ。ただし、いずれも証明を述べなくてよい。



第 8 (C) 問

1 から 10 までの番号が書かれた札が 1 枚ずつある。この 10 枚の札から無作為に 5 枚の札を取り出す。このとき、取り出された札のうち、番号が 5 以下であるものの枚数を X とおく。次の問いに答えよ。

- (1) X の確率分布を求めよ。
- (2) X の平均 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ。
- (3) $X = 5$ のときは 10,000 円, $X = 4$ のときは 1,000 円, $X = 3$ のときは 100 円の賞金もらえるが, その他の場合はもらえないものとする。賞金の期待値を求めよ。