

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（文系）

対象年度：2018年

試験時間：80分

問題数：7問

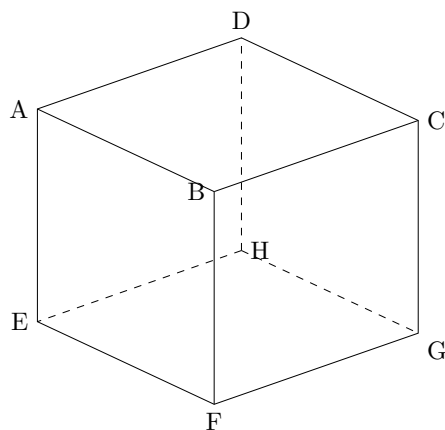
第 1 問

a を実数とし, $f(x) = 2x^2 - 4ax + 3a^2 - 4a + 1$ とする。

- (1) x に関する 2 次方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a のどんな値に対しても $f(2 + \sqrt{5}) > 0$ であることを示せ。

第 2 問

下図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して、対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ = 2AP - 1$ を満たしながら動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。



第 3 問

$n^{2018} + 2$ が 6 の倍数となるような, $n \geq 2017$ を満たす自然数 n のうち, 3 番目に小さいものを求めよ。

第 4 問

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの $(n - 2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返して, 記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

- (1) 確率 $P(4)$ を求めよ。
- (2) 確率 $P(6)$ を求めよ。
- (3) 確率 $P(11)$ を求めよ。

第 5 問

a を正の数とし, t は $0 \leq t < a$ を満たす数とする。点 $(t, (t-a)^2)$ における曲線 $y = (x-a)^2$ の接線と, x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

- (1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。
- (2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの t の値を a を用いて表せ。
- (3) s は $0 \leq s \leq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

第 6 問

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \dots$ の第 n 項を a_n とし、また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \dots$ の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし、2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_\ell\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり、また数列 $\{d_\ell\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

- (1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。
- (2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。

第 7 問

正方形 ABCD の辺を除く内部に、 $PA \perp PB$ を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{PC}$ を $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$ と表すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$ とするとき、 x, y を α を用いて表せ。
- (2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき、(1) で求めた x, y の和 $x + y$ の最大値を求め、そのときの P がどのような点かを答えよ。