

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（文系）

対象年度：2017年

試験時間：80分

問題数：7問

第 1 問

定数 a は $0 \leq a \leq 1$ をみたすとする。座標平面上に 4 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(a, 0)$ をとる。点 P は線分 OA 上, 点 Q は線分 OB 上にあり, $PQ \perp OA$ をみたすものとする。点 P が点 O と点 C 以外を動くときの $\triangle PQC$ の面積の最大値を S とする。

(1) $a = 1$ のときの S を求めよ。

(2) S を a を用いて表せ。

第 2 問

座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle PAQ = 90^\circ$ となるようにとる。ただし、点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。 $\angle APQ = \theta$ とし、 $\triangle APQ$ の面積を S とする。

- (1) S を θ を用いて表せ。
- (2) S の最小値、およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。
- (3) S が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍となるとき、点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

第 3 問

a, b を正の整数とすると、次を証明せよ。

- (1) $a^3 - a$ は 3 の倍数である。
- (2) $a - b$ が 3 の倍数ならば、 $a^3 - b^3$ は 9 の倍数である。
- (3) $a^3 - b^3$ は、3 の倍数ならば 9 の倍数である。

第 4 問

1 個のさいころを 3 回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- 1 回目は、出た目が得点になる。
- 2 回目は、出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は、出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし、総得点が n となる確率を p_n とする。

- (1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。
- (2) p_6 を求めよ。

第 5 問

n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$ とし, $k = 2\cos\frac{2\pi}{n}$ とおく。そして, 線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を, $\vec{b}$, $\vec{c}$, k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し, $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} > \frac{1}{12}$ を示せ。

第 6 問

座標平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする。

- (1) $n = 3$ をみたすような点 (a, b) の範囲を図示せよ。
- (2) $-3a < b$ かつ $n \leq 2$ をみたすように点 (a, b) が動くとき、 $b - 3a$ の最小値を求めよ。

第 7 問

t を 0 以上の実数とし、 O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ で 3 つの条件

$$PQ = 2, \quad p < q, \quad p + q = \sqrt{t}$$

をみたすものを考える。 $\triangle OPQ$ の面積を S とする。ただし、点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S = 0$ とする。

- (1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) S を t を用いて表せ。
- (3) $S = 1$ となるような t の個数を求めよ。