

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（文系）

対象年度：2013年

試験時間：80分

問題数：6問

第 1 問

a, b を正の整数とする。このとき、関数

$$y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right|$$

のグラフと直線 $y = b$ との共有点を考える。

- (1) 共有点が 3 個になるような (a, b) の組をすべて求めよ。
- (2) 共有点が 1 個になるような (a, b) の組のうち、 b が最小になるものを求めよ。

第 2 問

a, b を 100 以下の正の整数とする。2 つの分数 $\frac{a}{27}, \frac{31}{b}$ がどちらも既約分数であり、かつ、和 $\frac{a}{27} + \frac{31}{b}$ が整数であるとする。このような (a, b) の組をすべて求めよ。

第 3 問

1 辺の長さが 3 の正四面体 $OABC$ において、辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。
また、辺 OC 上に点 E をとり、 $CE = t$ とする。

- (1) AD の長さを求めよ。
- (2) $\cos \angle DAE$ を t を用いて表せ。
- (3) $\triangle ADE$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

第 4 問

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらが無作為に 1 列に並べる試行を行う。

- (1) 下記の条件 (A) が成り立つ確率を求めよ。
- (2) 下記の条件 (B) が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 条件 (A), (B) が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし、条件 (A), (B) は次のとおりである。

- (A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。
- (B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には、ちょうど 1 枚のカードがある。

第 5 問

a, b を実数とし, $a > 0$ とする。放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$, $B\left(b, \frac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_A と n_A , 点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_B と n_B とおいたとき, ℓ_A と ℓ_B が直交しているものとする。2 つの接線 ℓ_A, ℓ_B の交点を P とし, 2 つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) P, Q の座標を a を用いて表せ。
- (3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と, そのときの面積を求めよ。

第 6 問

整数 p, q ($p \geq q \geq 0$) に対して 2 項係数を ${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

- (1) n, k が 0 以上の整数のとき,

$${}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$$

を計算し, n によらない値になることを示せ。

- (2) m が 3 以上の整数のとき, 和 $\frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \frac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ。