

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（文系）

対象年度：2012年

試験時間：80分

問題数：6問

第 1 問

a を実数の定数とする。放物線 $y = x^2 - ax + a$ が x 軸の

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{または} \quad 3 \leq x \leq 4$$

を満たす部分と 2 つの異なる共有点を持つための a の条件を求めよ。

第 2 問

$AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$ および $OA = OB = OC = t$ を満たす四面体 $OABC$ がある。

- (1) $\angle BAC$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ。
- (3) 4 つの頂点 O , A , B , C が同一球面上にあるとき, その球の半径が最小になるような実数 t の値を求めよ。

第 3 問

さいころを 7 回投げ、 k 回目 ($1 \leq k \leq 7$) に出る目を X_k とする。

- (1) 積 $X_1 X_2$ が 18 以下である確率を求めよ。
- (2) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。
- (3) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。
- (4) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

第 4 問

p, q を互いに素な 2 以上の整数, m, n は $m < n$ なる正の整数とする。このとき, 分母が $p^2 q^2$ で, 分子が p でも q でも割り切れない分数のうち, m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。

第 5 問

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を ℓ_a とする。

- (1) 直線 ℓ_a が不等式

$$y > -x^2 + 2x - 5$$

の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

- (2) a が (1) で求めた範囲を動くとき、直線 ℓ_a が通らない点 (x, y) 全体の領域 D を図示せよ。

- (3) 連立不等式

$$\begin{cases} (y - x^2)(y + x^2 - 2x + 5) \leq 0 \\ y(y + 5) \leq 0 \end{cases}$$

の表す領域を E とする。 D と E の共通部分の面積を求めよ。

第 6 問

1 より小さい正の実数 a に対して

$$\text{円 } C(a) : (x + a - 1)^2 + (y + a - 1)^2 = 2a^2$$

と定める。その上で、数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

- (i) $n = 1$ のときは、円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに、円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし、円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。
- (ii) $n \geq 2$ のときは、円 $C(a)$ が直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに、円 $C(a_n)$ と直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ との接点を P_n とし、円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) a_2 を求めよ。
- (3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。