

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（文系）

対象年度：2010 年

試験時間：80 分

問題数：7 問

第 1 問

直角三角形 ABC は、 $\angle C$ が直角で、各辺の長さは整数であるとする。辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 辺 AB, CA の長さを p を用いて表せ。
- (2) $\tan \angle A$ と $\tan \angle B$ は、いずれも整数にならないことを示せ。

第 2 問

1 辺の長さが 2 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える。さいころを 3 回投げ、出た目を順に i, j, k とするとき、 $\triangle A_iA_jA_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし、 i, j, k の中に互いに等しい数があるときは、得点は 0 であるとする。

- (1) 得点が 0 となる確率を求めよ。
- (2) 得点が 27 となる確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。

第 3 問

$\triangle ABC$ において、頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1 、頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$ 、頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。
このとき、 $\triangle ABC$ の面積と、内接円の半径、および、外接円の半径を求めよ。

第 4 問

a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x - 2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

第 5 問

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b\}$$

とし、 D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で、 x 座標、 y 座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。

- (1) $a = 0$ のとき、 D に含まれる格子点の個数を求めよ。
- (2) a, b が共に整数であるとき、 D に含まれる格子点の個数は、 a, b の値によらず一定であることを示せ。

第 6 問

数直線の原点上にある点が、以下の規則で移動する試行を考える。

(規則) サイコロを振って出た目が奇数の場合は、正の方向に 1 移動し、出た目が偶数の場合は、負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の、点の座標を $X(k)$ とする。

- (1) $X(10) = 0$ である確率を求めよ。
- (2) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(5) \neq 0$ であって、かつ、 $X(6) = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(9) \neq 0$ であって、かつ、 $X(10) = 0$ となる確率を求めよ。

第 7 問

$\triangle ABC$ は、1 辺の長さが 1 の正三角形で、 t は正の実数とする。 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおく。

直線 AB , AC 上にそれぞれ点 D , E があり、 $\overrightarrow{AD} = t\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = t\vec{c}$ をみたしている。正三角形 $\triangle ADE$ の重心を G , 線分 BE の中点を M とする。

- (1) 内積 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG}$ を計算せよ。
- (2) t が正の実数全体を動くとき、 $\triangle CGM$ の面積を最小にする t の値と、そのときの面積を求めよ。