

入学試験過去問題

数 学

千葉大学（文系）

対象年度：2009 年

試験時間：80 分

問題数：8 問

第 1 問

放物線 $y = x^2 \cdots \textcircled{1}$ と直線 $y = x \cdots \textcircled{2}$ について次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $\textcircled{1}$ 上の点 P に対し、直線 $\textcircled{2}$ 上の点であって P に最も近い点を Q とする。
 P の x 座標を t とするとき、2 点間の距離 PQ を t を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた t の関数を $f(t)$ とするとき、 $f(t)$ のグラフをかけ。
- (3) (2) の関数 $f(t)$ について $f(t) = \sqrt{2}$ となる t の値を求めよ。

第 2 問

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形とする。 $\angle A$, $\angle B$ の大きさをそれぞれ A , B とおく。 $A = 30^\circ$ のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし, H は辺 BC 上の点である。このとき $\frac{AH}{BC}$ の値を求めよ。
- (2) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。

第 3 問

自然数 a, b, c, d は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

- (1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。
- (2) a と b が互いに素で、 c と d がどちらも素数 p の倍数ならば、 $p = 5$ であることを示せ。ただし、2 つの自然数が互いに素とは、1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

第 4 問

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

- (1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 10 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が 6 の倍数になる確率を求めよ。

第 5 問

座標平面上に点 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ を取る。線分 AB 上に点 P を取り、 P から x 軸に下ろした垂線を PH , A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし、また P は A と異なるものとする。 O を原点とし $\triangle OPM$ を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき、通過する点全体が作る円の面積が最小となるとき点 P の座標を求めよ。

第 6 問

n を自然数とすると、次の問いに答えよ。

- (1) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数とすると、

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_nC_k \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_nC_k$ は二項係数である。

- (2) 不等式

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

が成り立つことを示せ。

第 7 問

a と k を正の実数とする。 $y = \frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が、ともに原点 $O(0, 0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする。原点 O を通り、直線 $y = kx$ に垂直な直線を ℓ とする。放物線 C_1 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_1 、放物線 C_2 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき、 $S = S_1 + S_2$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) S を a と k を用いて表せ。
- (2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする。 S を最小にする a の値と、そのときの S の値を求めよ。

第 8 問

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

- (1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 12 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が平方数になる確率を求めよ。ただし、 X が平方数であるとは、ある自然数 n を用いて $X = n^2$ と表されることである。