2023年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は16頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 座標平面上に点 O $(0,\ 0)$，A $(0,\ 2)$，B $\left(\sqrt{2},\ 1\right)$ をとる。線分 OA 上に点 O，点 A と異なる点 P $(0,\ p)$ をとり，線分 BP 上の点 Q を，△APQ と △OBQ の面積が等しくなるようにとる。

(1) 直線 BP を表す方程式を求めよ。

(2) △OBQ の面積を p を用いて表せ。

(3) p が $0 < p < 2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

$\boxed{2}$ 1 個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える。出た目が 1，2 であれば得点は 2，出た目が 3 であれば得点は 1，出た目が 4，5，6 であれば得点は 0 とする。このゲームを k 回繰り返すとき，得点の合計を S_k とする。

(1) $S_2 = 3$ となる確率を求めよ。

(2) S_3 が奇数となる確率を求めよ。

(3) $S_4 \geqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{9}$ 以下となる最小の整数 n を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) p を実数とする。曲線 $y = |x^2 + x - 2|$ と直線 $y = x + p$ の共有点の個数を求めよ。

(2) 等式 $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_1^2 (xf(t) - t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 2つの実数 a，b は $0 < b < a$ を満たすとする。関数

$$f(x) = \frac{1}{b}\left(e^{-(a-b)x} - e^{-ax}\right)$$

の最大値を $M(a,\, b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a,\, b)$ と表す。ここで，e は自然対数の底である。

(1) $X(a,\, b)$ を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b \to +0} X(a,\, b)$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{b \to +0} M(a,\, b)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 点Oを原点とする座標平面において, 点Aと点Bが$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$となるような実数$k$は存在しないことを示せ。

(2) 点Bから直線OAに下ろした垂線とOAとの交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

(3) 実数tに対し，直線OA上の点Pを$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$となるようにとる。同様に直線OB上の点Qを$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となるようにとる。点Pを通り直線OAと直交する直線をℓ_1とし，点Qを通り直線OBと直交する直線をℓ_2とする。ℓ_1とℓ_2の交点をRとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$を用いて表せ。

(4) 3点O，A，Bを通る円の中心をCとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

$\boxed{6}$ 1 個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点 P を動かすことを繰り返すゲームを考える。最初の P の位置を $a_0 = 0$ とし，さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n を次のルールで定める。

- $a_{n-1} = 7$ のとき，$a_n = 7$
- $a_{n-1} \neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + m & (a_{n-1} + m = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ のとき}) \\ 1 & (a_{n-1} + m = 2,\ 12 \text{ のとき}) \\ 14 - (a_{n-1} + m) & (a_{n-1} + m = 8,\ 9,\ 10,\ 11 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) $a_2 = 1$ となる確率を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ について，$a_n = 7$ となる確率を求めよ。

(3) $n \geqq 3$ について，$a_n = 1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{7}$ 関数

$$f(x) = \left| \cos x - \sqrt{5}\sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right|$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) $S(t) = \displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく。このとき $S(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{8}$ 実数 a，b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき，a を z の実部，b を z の虚部とよび，それぞれ $a = \mathrm{Re}(z)$，$b = \mathrm{Im}(z)$ と表す。

(1) $z^3 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(2) $z^{100} = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ。

(3) n を正の整数とする。$z^n = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする。$N > \dfrac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ。

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)$ と実数 t に対し，x の関数 $tx - f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ と書く。

(1) $f(x) = x^4$ のとき，任意の実数 t について $g(t)$ が存在する。この $g(t)$ を求めよ。

以下，関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持ち，次の 2 つの条件 (i)，(ii) が成り立つものとする。

(i) $f'(x)$ は増加関数，すなわち $a < b$ ならば $f'(a) < f'(b)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$

(2) 任意の実数 t に対して，x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t)$ を持つことを示せ。

(3) s を実数とする。t が実数全体を動くとき，t の関数 $st - g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ。