2022年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は16頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 円周を 12 等分するように点 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{12}$ が時計回りに並んでいる。また，白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある。点 P を，次の操作によって 12 個の点上を移動させる。

操作：袋から球を一つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに，黒球ならば反時計回りに，サイコロの目の数だけ P を移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

P を最初に点 A_1 に置く。操作を 1 回行い，P が A_1 から移動した点を Q とおく。続けて操作を 1 回行い，P が Q から移動した点を R とおく。もう一度操作を行い，P が R から移動した点を S とおく。

(1) $R = A_1$ となる確率を求めよ。

(2) 3 点 Q，R，S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面において，原点 O と点 A $(1,\ 0)$ と点 B $(0,\ 1)$ がある。$0 < t < 1$ に対し，線分 BO，OA，AB のそれぞれを $t : (1-t)$ に内分する点を P，Q，R とする。

(1) $\triangle$PQR の面積を t の式で表せ。

(2) $\triangle$PQR が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ。

(3) $\theta = \angle$RPQ とする。(2) のそれぞれの場合に $\cos\theta$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ とする。$S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 0 以上 9999 以下の整数を 4 桁で表示し，以下の操作を行うこととする。ただし，4 桁で表示するとは，整数が 100 以上 999 以下の場合は千の位の数字を 0，10 以上 99 以下の場合は千の位と百の位の数字を 0，1 以上 9 以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を 0，そして 0 はどの位の数字も 0 とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ換える。さらに，百の位の数字と一の位の数字を入れ換える。

また，整数 L に対し，操作によって得られた整数を $\overline{L}$ と表す。

(1) M を 0 以上 9999 以下の整数とし，$M = 100x + y$ のように整数 x，y（$0 \leqq x \leqq 99$，$0 \leqq y \leqq 99$）を用いて表す。操作によって得られた $\overline{M}$ が M の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 3 を足した数に等しいならば，$-197x + 298y = 9$ が成り立つことを証明せよ。

(2) N が 0 以上 9999 以下の整数ならば，操作によって得られた整数 $\overline{N}$ は N の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 1 を足した数と等しくならないことを証明せよ。

$\boxed{5}$ n を自然数とする。n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく。

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。

(2) M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。

(3) M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない確率を求めよ。

$\boxed{6}$ 座標空間において，原点 O と点 A $(1,\ 0,\ -1)$ と点 B $(0,\ 5,\ 0)$ がある。実数 t を用いて $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される点全体を ℓ とする。また，xy 平面上の $y=x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の点 P $(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する。ℓ 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるようにとる。このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 曲線 C 上の点 R と ℓ 上の点 S のうち，$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また，そのときの $\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ x，y についての方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \qquad \cdots\cdots (*)$$

に関する次の問いに答えよ。

(1) x，y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち，y が最小であるものを求めよ。

(2) 数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき，$(x,\ y) = (a_{n+1},\ a_n)$ が $(*)$ を満たすならば，$(x,\ y) = (a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たすことを示せ。

(3) $(*)$ の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ。

$\boxed{8}$ 正の整数 m，n に対して，

$$A(m,\, n) = (m+1)n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\, dx$$

とおく。

(1) $e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\, n) \leqq 1$ を証明せよ。

(2) 各 m に対して，$b_m = \lim_{n \to \infty} A(m,\, n)$ を求めよ。

(3) 各 n に対して，$c_n = \lim_{m \to \infty} A(m,\, n)$ を求めよ。

$\boxed{9}$ r を正の実数とし，関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

を考える。

(1) $r = 1$ のとき，$f(x)$ はつねに増加することを示せ。

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ。

条件：$0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する。