

2021 年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄に受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は 0 点となることがあります。
4. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
6. この冊子は 16 頁です。落丁、乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

1 定数 a は $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

- 2 点 A, B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある。
- 2 点 C, D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある。
- 2 点 A, D の x 座標は等しく、かつ正である。
- 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を、原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

- (1) S を t の式で表せ。
- (2) S の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

2 平面上に半径がそれぞれ a^2 , b^2 , c^2 ($0 < a < b < c$) の3つの円 A , B , C および直線 l がある。3つの円はどれも直線 l に接していて、どの2つの円も外接しているとする。

- (1) c を a と b を用いて表せ。
- (2) 数列 a , b , c が等比数列となる時、その公比を求めよ。

3

袋に白球と黒球が5個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から1個の球を取り出す。それが白球ならば1点獲得する。黒球ならばさいころを投げ、出た目が3の倍数ならば1点獲得し、そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

- (1) $n = 2$ の場合、総得点が2点となる確率を求めよ。
- (2) $n = 3$ の場合、総得点が2点以上となる確率を求めよ。

4 m を正の整数とする。座標平面上の点 (x, y) で

$$xn^3 + yn^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

がすべて整数であるようなものは、連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq m$$

の表す領域に何個あるか答えよ。

5

袋に白球と黒球が5個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から1個の球を取り出す。それが白球ならば1点獲得する。黒球ならばさいころを投げ、出た目が3の倍数ならば1点獲得し、そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

- (1) $n = 2$ の場合、総得点が2点となる確率を求めよ。
- (2) $n = 4$ の場合、総得点が2点以上となる確率を求めよ。
- (3) $n = 10$ の場合、総得点が8点以上となる確率を求めよ。

6

座標平面上に曲線 $C : y = \frac{1}{x}$ および 3 点 $A(-1, -1)$, $B(-1, 0)$, $D(1, 0)$ がある。曲線 C 上の点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ に対して、直線 AP と直線 $y = -2$ の交点を Q とする。ただし、 P が A と等しいとき、直線 AP とは A における C の接線のこととする。また、直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする。

- (1) 点 P が曲線 C 上を動くとき、点 R の軌跡を求めよ。
- (2) 直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ。

7

以下の問いに答えよ。

- (1) $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とする。ただし、 i は虚数単位である。 z を 0 でない複素数とすると、次の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned} & \left(z - \frac{1}{z}\right) \left(wz - \frac{1}{wz}\right) \left(w^2z - \frac{1}{w^2z}\right) \left(w^3z - \frac{1}{w^3z}\right) \left(w^4z - \frac{1}{w^4z}\right) \\ &= z^5 - \frac{1}{z^5} \end{aligned}$$

- (2) ある定数 C に対して、等式

$$\sin \theta \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right) = C \sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ。また、 C の値を求めよ。

- (3) $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$ の値を求めよ。

8

2 曲線 $C_1 : y = e^{ax}$, $C_2 : y = a \log x + b$ は, x 座標が t ($0 < t < 1$) の点で接していて, $a \neq 0$ であるとする。ただし, 2 曲線が点 P で接するとは, P を共有し, P における接線が一致することである。

- (1) a および b を t の式で表せ。
- (2) 曲線 C_1 と x 軸, y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする。極限值 $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_1(t)$ を求めよ。
- (3) 曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。極限值 $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_2(t)$ を求めよ。

9

多項式 $f_n(x)$, $g_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を条件

$$f_1(x) = x, \quad g_1(x) = 1,$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + xg_n(x), \quad g_{n+1}(x) = g_n(x) - xf_n(x)$$

で定める。

- (1) 正の整数 n に対して, 等式

$$\{f_{n+1}(x)\}' = (n+1)g_n(x), \quad \{g_{n+1}(x)\}' = -(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し, 多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ。

- (2) 正の整数 n に対して, 区間 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta = f_n(\tan \theta) \cos^n \theta, \quad \cos n\theta = g_n(\tan \theta) \cos^n \theta$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 正の整数 n と実数 a に対して, 方程式 $f_n(x) = ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

