2020年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ A さんは 1 が書かれたカードを 1 枚，2 が書かれたカードを 2 枚，4 が書かれたカードを 1 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。B さんは 2 が書かれたカードを 2 枚，3 が書かれたカードを 2 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

(1) X が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2) $X < Y$ となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ k を定数とし，$f(x) = x^3 - kx$ とおく。曲線 $C : y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $\mathrm{P}\,(a,\ f(a))$ をとる。点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち，傾きが大きい方を ℓ_1，小さい方を ℓ_2 とする。さらに，C と ℓ_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1，C と ℓ_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。ℓ_1 および ℓ_2 の方程式と，Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_0\,(2,\ 0)$，$\mathrm{P}_1\,(0,\ 2)$，$\mathrm{Q}_0\,(0,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1\,(-1,\ 1)$ がある。正の整数 n に対し，点 P_n，Q_n まで定まったとき，点 P_{n+1}，Q_{n+1} を以下の条件で定める。

四角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ と四角形 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n-1}$ は相似であり，かつ辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ のみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_2，Q_2 の座標を求めよ。

(2) P_4，P_8 の座標を求めよ。

(3) 正の整数 m に対して，P_{8m} の座標を m の式で表せ。

$\boxed{4}$ t を実数とし，不等式

$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0, \quad t \leqq x \leqq t+1$$

の表す xy 平面上の領域を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。

t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$ 四面体 ABCD において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$，$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle\mathrm{BDC}$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。

$\boxed{7}$ a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y = x^2$ と $x = \dfrac{1}{2a}y^2 + \dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ 複素数平面上で複素数 0，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1，B_0，B_1 とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする。点 A_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）が表す複素数を z_n とする。

(1) 複素数 z_3 を求めよ。

(2) 複素数 z_6 を求めよ。

(3) 正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

$\boxed{9}$ 正の整数 n に対して,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k^2$$

とする。

(1) a_n を求めよ。

(2) b_n を求めよ。

(3) c_n を求めよ。

(4) d_n を求めよ。

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n}$ を求めよ。

$\boxed{10}$ 有理数 a，b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a，b は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。

$\boxed{11}$ 定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2\, dt \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して，不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 正の整数 n に対して，不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数 a（$0 \leqq a \leqq 1$）に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ を求めよ。