2019年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 円に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB} = 5, \quad \mathrm{BC} = 4, \quad \mathrm{CD} = 4, \quad \mathrm{DA} = 2$$

とする。また，対角線 AC と BD の交点を P とおく。

(1) 三角形 APB の外接円の半径を R_1，三角形 APD の外接円の半径を R_2 とするとき，$\dfrac{R_1}{R_2}$ の値を求めよ。

(2) AC の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフに関する以下の問いに答えよ。ただし，m は実数とする。

$$y = |x^2 - 2mx| - m$$

(1) $m = 1$ のときのグラフの概形をかけ。

(2) グラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

$\boxed{3}$ 正の約数の個数がちょうど m 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする。

(1) d_5 を求めよ。

(2) d_{15} を求めよ。

4 コインが5枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを1枚ずつ3つの箱A，B，Cのいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚，箱Aに入れる。出た目が2か3であればコインを1枚，箱Bに入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚，箱Cに入れる。さいころを5回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1) 箱Aと箱Bにコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A，Bいずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 三角形 ABC において $\angle A = 45^\circ$，$\angle B = 60^\circ$ である。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と BC が交わる点を D とし，頂点 C から辺 AB に引いた垂線と AB が交わる点を E とする。また，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{CE}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

(2) 直線 CE と直線 AD の交点を H とするとき，$\overrightarrow{CH}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{6}$ a は 0 でない実数とし，$f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x + 3$ とおく。

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフ C と導関数 $y = f'(x)$ のグラフ C' が相異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2) a が (1) の範囲にあるとき C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

$\boxed{7}$ $a_1 = 3$，$a_2 = 2$ とし，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$$

として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1) $n \geqq 2$ のとき $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。

$\boxed{8}$ 三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD}=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。

9 コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A，B，C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A，B，C いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

(3) 試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。

$\boxed{10}$ 座標平面上の円 C は，点 $(0,\ 0)$ を通り，中心が直線 $x+y=0$ 上にあり，さらに双曲線 $xy=1$ と接する。このとき，円 C の方程式を求めよ。ただし，円と双曲線がある点で接するとは，その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう。

$\boxed{11}$ n を正の整数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n \theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2} \theta \, d\theta$ を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta \, d\theta$ を求めよ。

$\boxed{12}$ 数直線上に動点 P があり，はじめに原点にあるとする。$k = 1, 2, \cdots$ に対し，k 回目にさいころを振ったとき，1，2 の目が出たら P は正の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，3，4 が出たら負の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，5，6 が出たら移動しないとする。n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする。

(1) $0 < X_n$ となる確率を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{2} < X_n$ となる確率を求めよ。

(3) ℓ は n 未満の正の整数とする。このとき，$\dfrac{1}{2^\ell} < X_n$ となる確率を求めよ。

$\boxed{13}$ a は実数とする。座標平面上で連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq (2a+3)x - a(a+3) \end{cases}$$

の表す領域を $D(a)$ とおく。いま，x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

(1) n を整数とする。このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) 任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点の個数と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ。