2018年度入学者選抜学力検査問題

# 数　　学

**注 意 事 項**

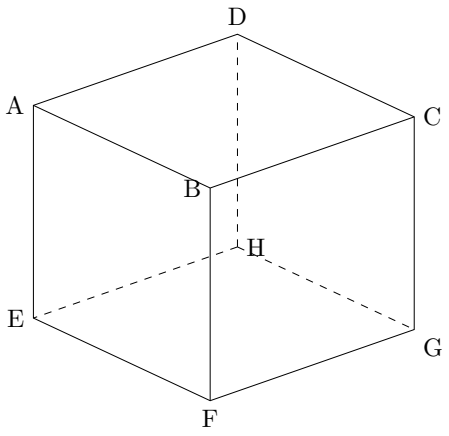
1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ $a$ を実数とし，$f(x) = 2x^2 - 4ax + 3a^2 - 4a + 1$ とする。

(1) $x$ に関する 2 次方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつような $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) $a$ のどんな値に対しても $f(2 + \sqrt{5}\,) > 0$ であることを示せ。

$\boxed{2}$ 下図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して，対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $\mathrm{OQ} = 2\mathrm{AP} - 1$ を満たしながら動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ。ただし点 P，Q は点 O とは一致しないものとする。



$\boxed{3}$ $n^{2018}+2$ が 6 の倍数となるような，$n \geqq 2017$ を満たす自然数 $n$ のうち，3 番目に小さいものを求めよ。

$\boxed{4}$ 箱の中に $n$ 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が $k$ 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1) 確率 $P(4)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(6)$ を求めよ。

(3) 確率 $P(11)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $a$ を正の数とし，$t$ は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，$x$ 軸および $y$ 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を $a$ および $t$ を用いて表せ。

(2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの $t$ の値を $a$ を用いて表せ。

(3) $s$ は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの $s$ と $t$ の値を $a$ を用いて表せ。

$\boxed{6}$ 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \cdots$ の第 $n$ 項を $a_n$ とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \cdots$ の第 $m$ 項を $b_m$ とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_\ell\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_\ell\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) $d_{1000}$ および $d_{1001}$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \cdots$ の第 $n$ 項を $a_n$ とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \cdots$ の第 $m$ 項を $b_m$ とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_\ell\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_\ell\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{d_\ell\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{d_\ell\}$ の初項から第 $\ell$ 項までの和 $S_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} d_i$ を求めよ。

$\boxed{8}$ 正方形 ABCD の辺を除く内部に，PA $\perp$ PB を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|}$ とするとき，$x$，$y$ を $\alpha$ を用いて表せ。

(2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1) で求めた $x$，$y$ の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。

$\boxed{9}$ 箱の中に $n$ 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が $k$ 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率 $P(k)$ を求めよ。

$\boxed{10}$

(1)　次の定積分を求めよ。

$$f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x)\, dt$$

(2)　(1) で求めた $x$ の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

$\boxed{11}$ $n$ を 3 以上の自然数として，$n$ 枚のカード $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}, C_n$ がある。初めにこれらのカードを下から $C_n, C_{n-1}, \cdots, C_2, C_1$ の順番に積み上げておく。いちばん上にあるカードが $C_1$ で，いちばん下が $C_n$ である。積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す。いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか，またはいちばん上に戻す。どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする。

$k = 1, 2, \cdots$ について，$k$ 回の試行の後にカード $C_1$ が上から数えて $\ell$ 番目にある確率を $P(k, \ell)$ ($\ell = 1, 2, \cdots, n$) で表し，また $k$ 回の試行の後にカード $C_2$ が上から数えて $\ell$ 番目にある確率を $Q(k, \ell)$ で表す。例えば $P(1, \ell)$ は $\ell$ によらず $\dfrac{1}{n}$ に等しい。以下の問いに答えよ。

(1) $P(2, \ell)$ を求めよ。

(2) $P(k, \ell)$ を求めよ。

(3) $Q(k, \ell)$ を求めよ。

$\boxed{12}$ 複素数 $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha = z + z^8$ とおく。$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha) = 0$ となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1) $f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の $\alpha$ 以外の 2 つの解を，$\alpha$ の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。