2017年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 定数 a は $0 \leqq a \leqq 1$ をみたすとする。座標平面上に 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(1,\ 2)$，C$(a,\ 0)$ をとる。点 P は線分 OA 上，点 Q は線分 OB 上にあり，PQ $\perp$ OA をみたすものとする。点 P が点 O と点 C 以外を動くときの $\triangle$PQC の面積の最大値を S とする。

(1) $a = 1$ のときの S を求めよ。

(2) S を a を用いて表せ。

$\boxed{2}$ 座標平面上に3点 O$(0,\ 0)$，A$\left(3,\ \sqrt{3}\right)$，B$(9,\ 0)$ がある。線分 OB 上に2点 P，Q を $\angle\mathrm{PAQ} = 90^\circ$ となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle\mathrm{APQ} = \theta$ とし，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

$\boxed{3}$ a，b を正の整数とするとき，次を証明せよ。

(1) $a^3 - a$ は 3 の倍数である。

(2) $a - b$ が 3 の倍数ならば，$a^3 - b^3$ は 9 の倍数である。

(3) $a^3 - b^3$ は，3 の倍数ならば 9 の倍数である。

$\boxed{4}$ 1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

- 1 回目は，出た目が得点になる。
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

$\boxed{5}$ n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$ とし，$k = 2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t : 1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2} \leqq t < \dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} > \dfrac{1}{12}$ を示せ。

$\boxed{6}$ 座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする。

(1) $n = 3$ をみたすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-3a < b$ かつ $n \leqq 2$ をみたすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b - 3a$ の最小値を求めよ。

7 1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

- 1 回目は，出た目が得点になる。
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

(3) p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。

$\boxed{8}$ t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 P $(p,\ p^2)$，Q $(q,\ q^2)$ で 3 つの条件

$$\mathrm{PQ} = 2, \quad p < q, \quad p + q = \sqrt{t}$$

をみたすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S = 0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S = 1$ となるような t の個数を求めよ。

$\boxed{9}$ 複素数平面上の点 z（$z \neq -\dfrac{i}{2}$）に対して，$w = \dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

$\boxed{10}$ 曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t（$t \geqq 0$）である点を共有し，その点で共通の接線を持つとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

$\boxed{11}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

(1) a_5 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し，その和を求めよ。

$\boxed{12}$ 曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t（$t \geqq 0$）である点を共有し，その点で共通の接線を持つとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(4) $S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると，$\alpha > \log \dfrac{12}{5}$ であり，$S(\alpha) < \dfrac{95}{144}$ となることを示せ。必要ならば $\log \dfrac{24}{5} < 1.57$ を用いてもよい。