2016年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 1 個のさいころを 2 回投げ，最初に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2) 実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。

(3) 実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面上に 5 点 O$(0,\ 0)$，A$(5,\ 0)$，B$(0,\ 11)$，P$(m,\ 0)$，Q$(0,\ n)$ をとる。ただし，m と n は $1 \leqq m \leqq 5$，$1 \leqq n \leqq 11$ を満たす整数とする。

(1) 三角形 OAB の内部に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点のことであり，内部には辺上の点は含まれない。

(2) 三角形 OPQ の内部に含まれる格子点の個数が三角形 OAB の内部に含まれる格子点の個数の半分になるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上に 5 点 A$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(1,\ 1)$，D$(1,\ 0)$，E$\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ がある。点 E と点 $\mathrm{P}_1(s,\ 1)$（$0 < s < 1$）を通る直線を ℓ_1 とする。直線 $y = 1$ に関して ℓ_1 と対称な直線を ℓ_2 とし，ℓ_2 と直線 $x = 1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x = 1$ に関して ℓ_2 と対称な直線 ℓ_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1) 直線 ℓ_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3) $\mathrm{EP}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で，点 P は放物線 $y = -x^2 + 2$ 上を動き，点 Q は放物線 $y = x^2 - 2$ 上を動く。ただし，P と Q は異なる点とする。

(1) 直線 PQ が原点を通るとき，線分 PQ の長さの最大値と最小値を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

$\boxed{5}$ 座標平面上にすべての内角が 180° 未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とおく。k は $0 \leqq k \leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s，t，u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC，BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC，AM の長さを用いて答えよ。

$\boxed{6}$ a は $0 < a < 2$ を満たす定数とする。$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}\,(t,\ 0)$，$\mathrm{B}\,(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}\,(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}\,(0,\ 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 数直線上の点 Q は，はじめは原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が $x=a$ にあるとき，

- 出た目が 1 ならば $x=a$ にとどまる。
- 出た目が 2，3 ならば $x=a+1$ へ動く。
- 出た目が 4，5，6 ならば $x=0$ に戻る（$a=0$ ならば動かない）。

(1) 整数 $a \geqq 0$ に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が $x=a$ にある確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=0$ にある確率を求めよ。

(3) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=1$ にある確率を求めよ。

$\boxed{8}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において，不等式 $\log x < x$ を示せ。

(2) $1 < a < b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。

(3) $x \geqq e$ において，不等式

$$\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2}$$

を示せ。ただし，e は自然対数の底である。

$\boxed{9}$ $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$（$i$ は虚数単位）とおく。

(1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき，$\alpha + \overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

$\boxed{10}$ 2点O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 2)$を直径とする円周からOを除いた部分を点Qが動く。点Aを通りx軸に平行な直線と直線OQの交点をRとする。点Qを通りx軸と平行な直線と，点Rを通りy軸と平行な直線との交点をPとする。点Pの軌跡をCとする。

(1) Cの方程式を求めよ。

(2) 正の実数aに対して，Cとx軸と2直線$x=a$，$x=-a$によって囲まれる図形を，x軸の周りに1回転してできる立体の体積を$V(a)$とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V(a)$を求めよ。

$\boxed{11}$ 曲線 $C : y = \sin x$ 上を点 $\mathrm{P}\,(t,\ \sin t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が動く。正の実数 r に対して，P における C の接線上に $\mathrm{PQ} = r$ となるように点 Q をとる。ただし，Q の x 座標は t よりも大きいとする。

(1) Q の座標を求めよ。

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ。

$\boxed{12}$ p を 2 でない素数とし，自然数 m，n は

$$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$$

を満たすとする。

(1) 互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ で

$$m+n\sqrt{p}=\frac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$$

を満たすものが存在することを示せ。

(2) x は (1) の条件を満たす自然数とする。x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ。