2015年度入学者選抜学力検査問題

# 数　　学

**注 意 事 項**

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ $a$ を実数とする。$x$ に関する方程式

$$|x^2 - 6x - |x - 6|| + x = a$$

の実数解の個数を求めよ。

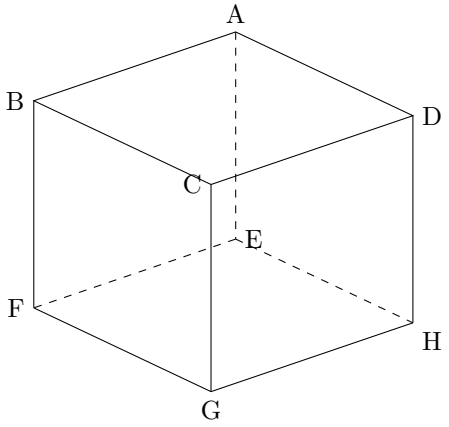
**2** 下図のような 1 辺の長さが 4 の立方体 ABCD-EFGH がある。辺 AB 上に点 P を BP $= 3$ となるように取り，辺 BC 上に点 Q を取る。また，B から △PFQ へ垂線 BK を下ろす。

BQ の長さを $a$ として，以下の問いに答えよ。

(1) $a$ を用いて △PFQ の面積を表せ。

(2) $a$ を用いて BK の長さを表せ。

(3) BK の長さは $\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$ 以下であることを示せ。



$\boxed{3}$ 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を 1 : 2 に内分する点を D，CA を 1 : 2 に内分する点を E，AB を 1 : 2 に内分する点を F とし，さらに BE と CF の交点を P，CF と AD の交点を Q，AD と BE の交点を R とする。

このとき，△PQR の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ さいころを5回振るとき，初めの4回においては6の目が偶数回出て，しかも最後の2回においては6の目がちょうど1回出る確率を求めよ。

ただし，6の目が一度も出ない場合も6の目が出る回数を偶数回とみなす。

$\boxed{5}$ $m$ を実数とする。$x$ に関する方程式

$$x^3 - 3x - |x - m| = 0$$

の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{6}$ $k$，$m$，$n$ を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $2^k$ を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，$k$ を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2) $4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，$2^{mn}$ を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

$\boxed{7}$ $b$ と $c$ を $b^2+4c>0$ を満たす実数として, $x$ に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を $\alpha$, $\beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1} \quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

により定める。このとき，つぎの問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n \quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 $a_n$ がすべて整数であるための必要十分条件は，$b$, $c$ がともに整数であることである。これを証明せよ。

$\boxed{8}$ コインを $n$ 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

- コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。
- コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。
- コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

例えばコインを 3 回投げて（裏, 表, 裏）の順に出たときの得点は, $1+1+1=3$ より 3 点となる。また（裏，裏，表）のときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。

コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が $m$ となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2) $n \leqq m \leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を $n$ と $m$ の式で表せ。

$\boxed{9}$ 双曲線 $x^2 - y^2 = 1 \cdots$ ① の漸近線 $y = x \cdots$ ② 上の点 $\mathrm{P}_0 : (a_0,\ a_0)$（ただし $a_0 > 0$）を通る双曲線 ① の接線を考え，接点を $\mathrm{Q}_1$ とする。$\mathrm{Q}_1$ を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と，漸近線 ② との交点を $\mathrm{P}_1 : (a_1,\ a_1)$ とする。次に $\mathrm{P}_1$ を通る双曲線 ① の接線の接点を $\mathrm{Q}_2$，$\mathrm{Q}_2$ を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と，漸近線 ② との交点を $\mathrm{P}_2 : (a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n : (a_n,\ a_n)$，$\mathrm{Q}_n$ を定義していく。

(1) $\mathrm{Q}_n$ の座標を $a_n$ を用いて表せ。

(2) $a_n$ を $a_0$ を用いて表せ。

(3) $\triangle \mathrm{P}_n \mathrm{Q}_n \mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。

$\boxed{10}$ 0 以上の整数 $n$ に対して，整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上の任意の整数 $n$ に対して

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

となることを示せ。

(2) 定積分

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx$$

の値を求めよ。

$\boxed{11}$ $c$ を実数とし，曲線 $y = x^2 + c \cdots$ ① と曲線 $y = \log x \cdots$ ② の共通接線を考える。

(1) 共通接線の本数を，実数 $c$ の値によって答えよ。

(2) 共通接線が 1 本であるとき，その接線と ①，② それぞれとの接点を求めよ。

(3) 共通接線が 1 本であるとき，①，② と $x$ 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{12}$ 平面上に 2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1, \qquad C_2 : \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 $\mathrm{P}_1$ は $C_1$ 上を反時計周りに一定の速さで動き，点 $\mathrm{P}_2$ は $C_2$ 上を反時計周りに一定の速さで動く。二点 $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$ はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。$\mathrm{P}_1$ は $C_1$ を一周して時刻 $2\pi$ に点 $(1,\ 0)$ に戻り，$\mathrm{P}_2$ は $C_2$ を二周して時刻 $2\pi$ に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。$\mathrm{P}_1$ と $\mathrm{P}_2$ の中点を M とおく。

$\mathrm{P}_1$ が $C_1$ を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{13}$ 関数 $f(x) = |x + 2\sin(x + a) + b|$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ での最大値と最小値の差は，定数 $a$，$b$ によらず常に $\pi$ 以上で，かつ $\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ。