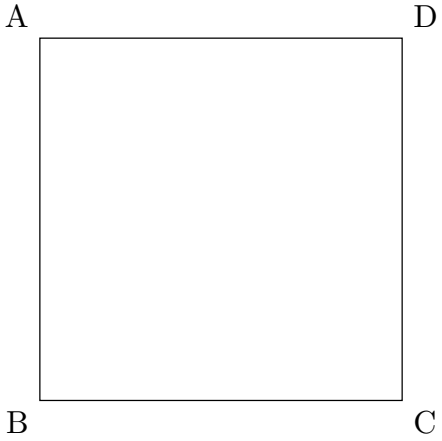
2014年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

1　下図のような1辺の長さ10 cmの正方形ABCDがある。点Pおよび点Qは時刻0にAおよびBをそれぞれ出発し，正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒1 cm進む。また，点Rは時刻0にBを出発し，正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒2 cm進む。点RがAに達するまでに△PQRの面積が35 cm^2となる時刻をすべて求めよ。



$\boxed{2}$ △ABC において，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とするとき，次の等式が成り立つとする。

$$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{3}$$

また，A，B，C のうち最も大きな角は 120° であるとする。このとき，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{3}$ p は奇数である素数とし，$N = (p+1)(p+3)(p+5)$ とおく。

(1) N は 48 の倍数であることを示せ。

(2) N が 144 の倍数になるような p の値を，小さい順に 5 つ求めよ。

$\boxed{4}$ A，B ふたりは，それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負から成るつぎのゲームをする。

- 初めに A，B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。
- A，B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出したほうがこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
- 袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
- A，B どちらかが 2 回勝てば，カードの取り出しをやめて，2 回勝ったほうをゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(2) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(3) A がゲームの勝者になる確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回（ただし $0 \leqq A \leqq N$）取り出す確率を $p(N, A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $p(N, A)$ を N と A を用いて表せ。

(2) N が 10 の倍数，すなわち $N = 10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n, 0), p(10n, 1), \ldots, p(10n, 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n, 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!} \leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0! = 1$ とする。

(ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leqq 1$ を示す。

$\boxed{6}$ 座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$（ただし $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$）における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

$\boxed{7}$ 実数 a に対し，関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} |t+1|\,dt + a$ を考える。曲線 $C : y = f(x)$ が x 軸と 2 個の共有点を持つための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{8}$ 座標平面上に，円 $C : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ と点 $\mathrm{Q}\,(1,\ 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3,\ 0)$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,\ 0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき，3 点 Q，T_n，P_{n+1} は同一直線上にある。（$n = 1, 2, \ldots$）

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 T_1 の座標を求めよ。

(2) 点 P_2 の座標を求めよ。

(3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ。

(4) 点 P_n の座標を n の式で表せ。

$\boxed{9}$ n，m を 0 以上の整数とし，

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta \, d\theta$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式

$$I_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx$$

を示せ。

(3) 次の式

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1} - \frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2} + \cdots + (-1)^m \frac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$$

を示せ。ただし $0! = 1$ とする。

$\boxed{10}$ 関数 $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x \geqq 0$ のとき $(x^2 + 2x - 2)e^x \geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{11}$ 関数 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

$\boxed{12}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $t > 0$ のとき

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 座標平面上の点 $(0,\ a)$ を通って曲線 $y = xe^x$ に何本の接線が引けるか求めよ。

$\boxed{13}$ 自然数 n に対して，和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。

(1) 各自然数 n に対して $2^k \leqq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)} b_n}$$

と表されることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3) さらに，自然数 m，n（$m < n$）に対して，和

$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。$S_{m,n}$ はどんな m，n（$m < n$）に対しても整数にならないことを示せ。