

2013 年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄に受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は 0 点となることがあります。
4. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
6. この冊子は 20 頁です。落丁、乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

1 a, b を正の整数とする。このとき、関数

$$y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right|$$

のグラフと直線 $y = b$ との共有点を考える。

- (1) 共有点が 3 個になるような (a, b) の組をすべて求めよ。
- (2) 共有点が 1 個になるような (a, b) の組のうち、 b が最小になるものを求めよ。

- 2 a, b を 100 以下の正の整数とする。2 つの分数 $\frac{a}{27}, \frac{31}{b}$ がどちらも既約分数であり、かつ、和 $\frac{a}{27} + \frac{31}{b}$ が整数であるとする。このような (a, b) の組をすべて求めよ。

3 1 辺の長さが 3 の正四面体 $OABC$ において，辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり， $CE = t$ とする。

- (1) AD の長さを求めよ。
- (2) $\cos \angle DAE$ を t を用いて表せ。
- (3) $\triangle ADE$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

4

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを一列に並べる試行を行う。

- (1) 下記の条件 (A) が成り立つ確率を求めよ。
- (2) 下記の条件 (B) が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 条件 (A), (B) が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし、条件 (A), (B) は次のとおりである。

- (A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。
- (B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には、ちょうど 1 枚のカードがある。

5 a, b を実数とし, $a > 0$ とする。放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$, $B\left(b, \frac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_A と n_A , 点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_B と n_B とおいたとき, ℓ_A と ℓ_B が直交しているものとする。2 つの接線 ℓ_A, ℓ_B の交点を P とし, 2 つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) P, Q の座標を a を用いて表せ。
- (3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と, そのときの面積を求めよ。

6 整数 p, q ($p \geq q \geq 0$) に対して 2 項係数を ${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき,

$${}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$$

を計算し, n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき, 和 $\frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \frac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ。

- 7 a は 0 でない実数とする。直線 $y = ax$ と曲線 $y = x \log(x + 1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

8 r を 1 より大きい実数とする。半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる。最初に円 C の中心 P は座標平面の $(0, 1)$, 点 Q は $(0, 2)$ にあるものとし, 円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく。角 θ ラジアンだけ回転したとき, 半直線 PQ 上に $PR = r$ となる点 R をとる。 θ を 0 から 2π ままで動かしたときの R の軌跡を考える。

- (1) α, β は $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ をみたし, $\theta = \alpha$ のときの R の座標と $\theta = \beta$ のときの R の座標とが一致するものとする。 $t = \frac{\beta - \alpha}{2}$ とおくとき, r を t を用いて表せ。
- (2) (1) において, θ を α から β まで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする。 S を t を用いて表せ。
- (3) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S}{r^2}$ を求めよ。

9 $m^4 + 14m^2$ が $2m + 1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。

10 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ$ を示せ。

