2011年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は24頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1，2 回目に出る目を a_2，3 回目に出る目を a_3 とし，整数 n を

$$n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

と定める。

(1) $n = 0$ である確率を求めよ。

(2) $|n| = 30$ である確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle \mathrm{BAC} = 60^\circ$，$\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

$\boxed{3}$ 四角錐 OABCD において，底面 ABCD は 1 辺の長さ 2 の正方形で

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \sqrt{5}$$

である。

(1) 四角錐 OABCD の高さを求めよ。

(2) 四角錐 OABCD に内接する球 S の半径を求めよ。

(3) 内接する球 S の表面積と体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 実数 x の関数 $f(x) = |x-1|(x-2)$ を考える。$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x + a$ との共有点の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるかを調べよ。

$\boxed{5}$ a は正の実数とし，座標平面上の直線 $\ell : y = x$ と放物線 $C : y = ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)$（ただし $0 < x < \dfrac{1}{a}$）で ℓ との距離を最大にする点を $\mathrm{P}\,(s,\ t)$ とおく。また P と ℓ との距離を d とおく。

以下の問いに答えよ。

(1) d，s，t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}\,(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

$\boxed{6}$ 三角形 ABC の外心を O，重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

$\boxed{7}$ n 人（$n \geqq 3$）でじゃんけんを 1 回行うとき，次の問いに答えよ。

(1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ。

(2) あいこになる確率を求めよ。

(3) 勝つ人数の期待値を求めよ。

ここで「あいこ」とは 1 種類または 3 種類の手が出る場合であり，勝つ人数が 0 の場合である。

$\boxed{8}$ n 段の階段を上るのに，一歩で 1 段，2 段，または 3 段を上ることができるとする。この階段の上り方の総数を a_n とおく。たとえば，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 4$ である。

(1) a_4，a_5 の値を求めよ。

(2) a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，a_{n+3}（$n \geqq 1$）の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) a_{10} の値を求めよ。

$\boxed{9}$ r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n（$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）があり，その頂点を反時計回りに A_n，B_n，C_n，D_n とする。さらに R_n は次の条件 (i)，(ii) を満たすとする。

(i) 正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0\,(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0\,(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0\,(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0\,(0,\ 1)$ である。

(ii) $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_2，A_3，A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2) A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$（$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）とおく。$x_{n+1} - x_n$ および $y_{n+1} - y_n$ を r，n の式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を r を用いて表せ。

$\boxed{10}$ 三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

$\boxed{11}$ $f(x) = x\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$，$g(x) = \log(1+x^2)$（$x$ は実数）とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right) - 2\log n\right\}$ の値を求めよ。

$\boxed{12}$ $k+1$ 個（$k \geqq 1$）の部屋 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_k$ がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回（$n \geqq 1$）部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

$\boxed{13}$ a，b，c は実数とし

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$$

とおく。さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち

$$\alpha + \beta = -(a+1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{a}$$

を満たすと仮定する。

(1) b，c を a を用いて表せ。

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{14}$ 次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sqrt{x^2+y^2} \geqq x+y+a\sqrt{xy}$$

が任意の正の実数 x，y に対して成立するような，最大の実数 a の値を求めよ。

(2) 0 以上 1 以下の実数 a，b，c，d に対して

$$abcd \leqq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{15}$ 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2 の最大値，およびその最大値を与える x，y の値を求めよ。