2010年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 直角三角形 ABC は，$\angle$C が直角で，各辺の長さは整数であるとする。辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) 辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ。

(2) $\tan\angle$A と $\tan\angle$B は，いずれも整数にならないことを示せ。

$\boxed{2}$ 1 辺の長さが 2 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える。さいころを 3 回投げ，出た目を順に i，j，k とするとき，$\triangle A_iA_jA_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし，i，j，k の中に互いに等しい数があるときは，得点は 0 であるとする。

(1) 得点が 0 となる確率を求めよ。

(2) 得点が 27 となる確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

$\boxed{3}$ △ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。

このとき，△ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。

$\boxed{4}$ a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x-2| + \dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

$\boxed{5}$ 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \left\{(x,\ y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax + b\right\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $a = 0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) a，b が共に整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a，b の値によらず一定であることを示せ。

$\boxed{6}$ 数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1) $X(10) = 0$ である確率を求めよ。

(2) $X(1) \neq 0,\ X(2) \neq 0,\ \cdots,\ X(5) \neq 0$ であって，かつ，$X(6) = 0$ となる確率を求めよ。

(3) $X(1) \neq 0,\ X(2) \neq 0,\ \cdots,\ X(9) \neq 0$ であって，かつ，$X(10) = 0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{7}$ △ABC は，1 辺の長さが 1 の正三角形で，t は正の実数とする。$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。

直線 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = t\,\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = t\,\overrightarrow{c}$ をみたしている。正三角形 △ADE の重心を G，線分 BE の中点を M とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を計算せよ。

(2) t が正の実数全体を動くとき，△CGM の面積を最小にする t の値と，そのときの面積を求めよ。

$\boxed{8}$ a，b は実数とする。関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

をみたし，かつ，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である。このとき，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$$

を最小にする a，b の値と，その最小値を求めよ。

$\boxed{9}$ a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O $(0,\ 0)$，A $(1,\ 0)$ をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 P $\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 Q $\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(1) $p>0$，$q>0$

(2) $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(3) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

をみたしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

$\boxed{10}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

(2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{11}$ $f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件 (P) を考える。

(P) 正の実数 r を十分小さく選べば，$|x-a|<r$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq f(a)$ が成り立つ。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a が条件 (P) をみたし，かつ，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)=0$ であることを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} |x|-x & (x<1 \text{ のとき}) \\ |x^2-6x+8| & (x \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき，条件 (P) をみたすような実数 a 全体の集合を決定せよ。

(3) 一般に，実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し，次の命題は正しいか。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ。

（命題）すべての実数 a が条件 (P) をみたすならば，$f(x)$ は定数関数である。