2009年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 放物線 $y = x^2 \cdots$ ① と直線 $y = x \cdots$ ② について次の問いに答えよ。

(1) 放物線 ① 上の点 P に対し，直線 ② 上の点であって P に最も近い点を Q とする。P の x 座標を t とするとき，2 点間の距離 PQ を t を用いて表せ。

(2) (1) で求めた t の関数を $f(t)$ とするとき，$f(t)$ のグラフをかけ。

(3) (2) の関数 $f(t)$ について $f(t) = \sqrt{2}$ となる t の値を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形とする。$\angle$A，$\angle$B の大きさをそれぞれ A，B とおく。$A = 30^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし，H は辺 BC 上の点である。このとき $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 自然数 a，b，c，d は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

(1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。

(2) a と b が互いに素で，c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，$p = 5$ であることを示せ。ただし，2 つの自然数が互いに素とは，1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

$\boxed{4}$ 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。このなかから無作為に4枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた4つの番号の積を X とおく。

(1) X が5の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が10の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が6の倍数になる確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 座標平面上に点 A $(3,\ 0)$，B $(0,\ 2)$ を取る。線分 AB 上に点 P を取り，P から x 軸に下ろした垂線を PH，A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし，また P は A と異なるものとする。O を原点とし △OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき，通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

$\boxed{6}$ n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2) 不等式

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) 不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{7}$ a と k を正の実数とする。$y = \dfrac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\dfrac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y = kx$ に垂直な直線を ℓ とする。放物線 C_1 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S = S_1 + S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a と k を用いて表せ。

(2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

$\boxed{8}$ 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。このなかから無作為に4枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた4つの番号の積を X とおく。

(1) X が5の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が12の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X が平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X = n^2$ と表されることである。

$\boxed{9}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とし，また実数 a，b について $g(x) = e^{-ax+b}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において常に $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つために a，b が満たすべき条件を求めよ。

(2) $y = g(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a，b を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y = g(x)$ のグラフが点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a，b を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき，$y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3) (2) で定めた $y = g_1(x)$，$y = g_2(x)$ と $y = f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{10}$ 次の問いに答えよ。

(1) 置換 $x = \tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ を求めよ。

(2) $t > 1$ に対して $g(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}} dx$ と定める。$t \to \infty$ のとき $g(t) - at^b$ が収束するような正の実数 a，b を求めよ。

$\boxed{11}$ 次の問いに答えよ。

(1) 5 以上の素数は，ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ。

(2) N を自然数とする。$6N-1$ は，$6n-1$（n は自然数）の形で表される素数を約数にもつことを示せ。

(3) $6n-1$（n は自然数）の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ。

$\boxed{12}$ a を実数とするとき，関数

$$f(x) = x + a^2 - 2, \quad g(x) = x(x-a)(x-a-2)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 命題「$f(x) \geqq 0 \Longrightarrow g(x) \geqq 0$」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ。

(2) 命題「$x \geqq 0 \Longrightarrow$「$f(x) \geqq 0$ または $g(x) \geqq 0$」」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ。