2008年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は20頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ $\triangle$ABC において $\mathrm{BC} = 2$，$\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = 60^\circ$ とする。

(1) このような三角形の面積の最大値を求めよ。そのときの 2 辺 AB，AC の長さを求めよ。

(2) (1) で得た三角形の内接円の半径を求めよ。

$\boxed{2}$ m を実数とする。関数 $y = |x|(x-4) - x - m$ のグラフが x 軸と相異なる 3 点で交わるような m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 正三角形 ABC は，1 辺の長さが 1 である正六角形の辺上に 3 頂点をもつとする。

(1) このような正三角形 ABC の 1 辺の長さ AB の最大値と最小値を求めよ。

(2) 頂点 A が正六角形の 1 辺を 1 : 2 に内分しているとき AB^2 を求めよ。

$\boxed{4}$ n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ，1 回目に出た目の数を x，2 回目に出た目の数を y とする。$|x-n|+|y-n| \leqq n$ となる確率を P_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) P_1 を求めよ。

(2) P_n が最大となる n を求め，そのときの P_n を求めよ。

(3) $P_n = \dfrac{1}{36}$ となる n を求めよ。

$\boxed{5}$ 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2) a，b を整数とする。$a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。

$\boxed{6}$ 2 次関数 $f(x)$ は

$$xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x)\int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$

を満たすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $xf(x)$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ 平面上の△ABC において，辺 AB を 4 : 3 に内分する点を D，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{q}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ。

(2) 点 O が △ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB，BC，CA の長さの 2 乗の比を求めよ。

$\boxed{8}$ 1から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から1枚を取り出し，その番号を記録してからもとに戻す。この操作を3回繰り返す。記録した3個の番号が3つとも異なる場合には大きい方から2番目の値を X とする。2つが一致し，1つがこれと異なる場合には，2つの同じ値を X とし，3つとも同じならその値を X とする。

(1) 確率 $P(X \leqq k)$（$k = 1, 2, \cdots, n$）を求めよ。

(2) 確率 $P(X = k)$（$k = 1, 2, \cdots, n$）を求めよ。

(3) $P(X = k)$ が最大となる k の値はいくつか。

$\boxed{9}$ 関数 $y = \log|x|$ のグラフ G 上に動点 A，B があり，それぞれの x 座標を a，b とする。A における接線と B における接線が直交し，$a > 0$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) ab を求めよ。

(2) 線分 AB の中点の存在範囲を求めよ。

(3) 直線 AB が点 $(1,\ 0)$ を通り，$a \neq 1$ を満たすとき，直線 AB と G で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{10}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $A^m = E$ となる最小の自然数 m と，$B^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2) m は (1) で求めた値とし，k は $1 \leqq k \leqq m$ を満たす自然数とする。単位円周上の点 P に対し，行列 B，A^2，A^k で表される移動による P の行き先を，それぞれ Q，R，S とする。△QRS が正三角形となるような k，P の組をすべて求めよ。

$\boxed{11}$ 実数 a，b は $0 < a < b$ を満たし，x，y，z はいずれも a 以上かつ b 以下であるとする。このとき次を示せ。

(1) $x + y = a + b$ ならば，$xy \geqq ab$ である。

(2) $x + y + z = a + 2b$ ならば，$xyz \geqq ab^2$ である。

$\boxed{12}$ $c \geqq 0$ に対して，連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{4\pi}{3}, \quad 0 \leqq y \leqq |\sin x - c|$$

で表される座標平面上の図形を A とする。

(1) A の面積 S を最小にするような c の値と，そのときの S を求めよ。

(2) A を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とする。V を最小にするような c の値と，そのときの V を求めよ。